INTEGRAZIONE PER PARTI:

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)\, g(x) = \left(f(x)\cdot g(x)\right)' - f(x)\cdot g'(x)$$

$$\int f'(x) g(x)\, dx = \int \left(f(x)\cdot g(x)\right)' dx - \int f(x)\cdot g'(x)\, dx$$

$$\int f'(x) g(x)\, dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x) g'(x)\, dx$$

$$\int \log(x)\, dx = \int 1 \cdot \log(x)\, dx = x\cdot \log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx$$

$$= x\cdot \log(x) - \int 1\, dx$$

$$= x\cdot \log(x) - x + c$$

$$\int f'(x) g(x)\, dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x) g'(x)\, dx$$

$$\int x\cdot \sin(x)\, dx = -\cos(x)\cdot x - \int(-\cos(x))\, dx =$$

$f'(x) = \sin(x)$

$$= -x\cos(x) + \int \cos(x)\, dx$$

$g(x) = x$

$$= -x\cos(x) + \sin(x) + c$$

$$\int f'(x) g(x)\, dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x) g'(x)\, dx$$

$$\int x\, e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot x - \int \frac{1}{2} e^{2x}\, dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

$g(x) = x$

$f'(x) = e^{2x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + c$

$$\int_0^1 x\, e^{2x}\, dx = \left[\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} - \left[-\frac{1}{4}\right] = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

ALGEBRA LINEARE

DEF: UNA MATRICE CON m RIGHE E k COLONNE È UN ARRANGIAMENTO DI NUMERI REALI DEL TIPO

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix}$$

a_{ij} $\quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, k$

SE $m = k$ LA MATRICE SI CHIAMA QUADRATA ALTRIMENTI RETTANGOLARE

L'INSIEME DELLE MATRICI REALI CON m RIGHE E k COLONNE SI INDICA CON $\mathcal{M}(m \times k)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2 \times 2) \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \pi \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2 \times 3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & \pi \\ \sqrt{2} & e & 0 \end{pmatrix}$$

→ SOTTOMATRICE

UNA MATRICE OTTENUTA DA A RIMUOVENDO UN NUMERO ARBITRARIO DI RIGHE E/O COLONNE SI CHIAMA SOTTOMATRICE DI A

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ \sqrt{2} & e & 0 \end{pmatrix}$$ È UNA SOTTOMATRICE

SULLO SPAZIO $\mathcal{M}(m \times k)$ È POSSIBILE DEFINIRE L'OPERAZIONE DI SOMMA E SOTTRAZIONE

SE $A \in \mathcal{M}(m \times k)$ E $B \in \mathcal{M}(m \times k)$ DEFINISCO

$$C = A + B$$

LA MATRICE I CUI ELEMENTI SONO

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, k$$

$$D = A - B$$

LA MATRICE I CUI ELEMENTI SONO

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+1 & -1+1 \\ 0+3 & 1+0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

L'ELEMENTO NEUTRO DELLA SOMMA IN $\mathcal{M}(n \times k)$ È LA MATRICE CON N RIGHE E K COLONNE CHE CONTIENE TUTTI ZERI

$$0 \in \mathcal{M}(n \times k)$$

$$0_{n \times k} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\forall A \in \mathcal{M}(m \times k)$ E $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ È DEFINITA LA MATRICE $\alpha \cdot A$

$$(\alpha \cdot A)_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

PROPRIETÀ DELLA SOMMA DI MATRICI: $A \in \mathcal{M}(m \times k)$, $B \in \mathcal{M}(m \times k)$, $C \in \mathcal{M}(m \times k)$

1) $A + B = B + A$
2) $(A+B)+C = A+(B+C)$
3) $A + 0 = A \qquad 0 \in \mathcal{M}(m \times k)$
4) $A + (-A) = 0$

DEF: SIA $A \in \mathcal{M}(m \times k)$. SI CHIAMA MATRICE TRASPOSTA DI A (E SI INDICA CON A^T) LA MATRICE $k \times m$ OTTENUTA SCAMBIANDO LE RIGHE DI A CON LE SUE COLONNE. OVVERO LA MATRICE I CUI ELEMENTI SONO:

$$(A^T)_{ij} = a_{ji} \qquad A \in \mathcal{M}(m \times k) \qquad A^T \in \mathcal{M}(k \times m)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(2 \times 3) \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}(3\times 2)$

DEF: UNA MATRICE SI DICE SIMMETRICA SE

$$A^T = A$$

E SI DICE ANTI-SIMMETRICA SE

$$A^T = -A$$

LEMMA: GLI ELEMENTI DIAGONALI DI UNA MATRICE ANTI-SIMMETRICA SONO TUTTI NULLI

$$(A^T)_{ii} = a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0 \quad \forall i$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = A \Rightarrow \text{SIMMETRICA}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A \Rightarrow \text{ANTI-SIMMETRICA}$$

PROPRIETÀ DELLA TRASPOSTA: $A \in \mathcal{M}(m\times k)$, $B \in \mathcal{M}(m\times k)$ ALLORA

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$

DIM: $(A+B)^T_{ij} = (A+B)_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = (A^T)_{ij} + (B^T)_{ij}$

2) $(A^T)^T = A$

DEF: UNA MATRICE CON m RIGHE ED UNA SOLA COLONNA VIENE CHIAMATA VETTORE. LO SPAZIO DEI VETTORI CON m RIGHE SI CHIAMA $\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

SOMMA E SOTTRAZIONE DI VETTORI DELLA STESSA DIMENSIONE SONO EREDITATE DALLA DEFINIZIONE DATA PER LE MATRICI

$$\text{SE} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \Rightarrow u^T = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(1 \times m)$$

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(m \times 1)$$

VETTORE COLONNA

VETTORE RIGA

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\pi \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\pi \end{pmatrix}$$

DEF: DATI VETTORI $V_1, \dots, V_k$ ELEMENTI DI $\mathbb{R}^m$ UNA COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DATI È UN QUALSIASI VETTORE DELLA FORMA

$$u = c_1 V_1 + \dots + c_k V_k \qquad \text{CON } c_j \in \mathbb{R} \quad \forall j = 1, \dots, k$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

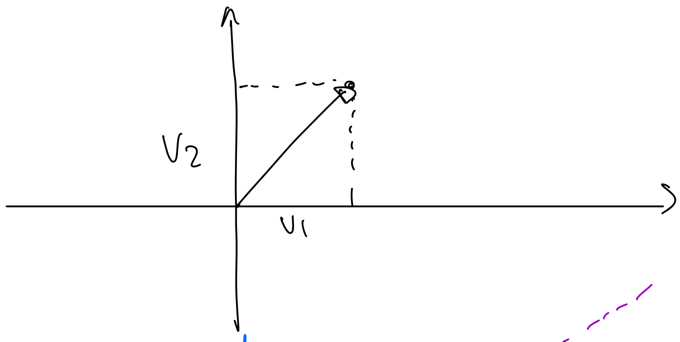
$$= \begin{pmatrix} 2c_1 - c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

DEF. DATI VETTORI $\{V_1, \dots, V_k\}$ SI CHIAMA SPAZIO GENERATO DAI VETTORI

L'INSIEME DI TUTTE LE LORO POSSIBILI COMBINAZIONI LINEARI

È E SI INDICA CON $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$

$\mathbb{R}^2$

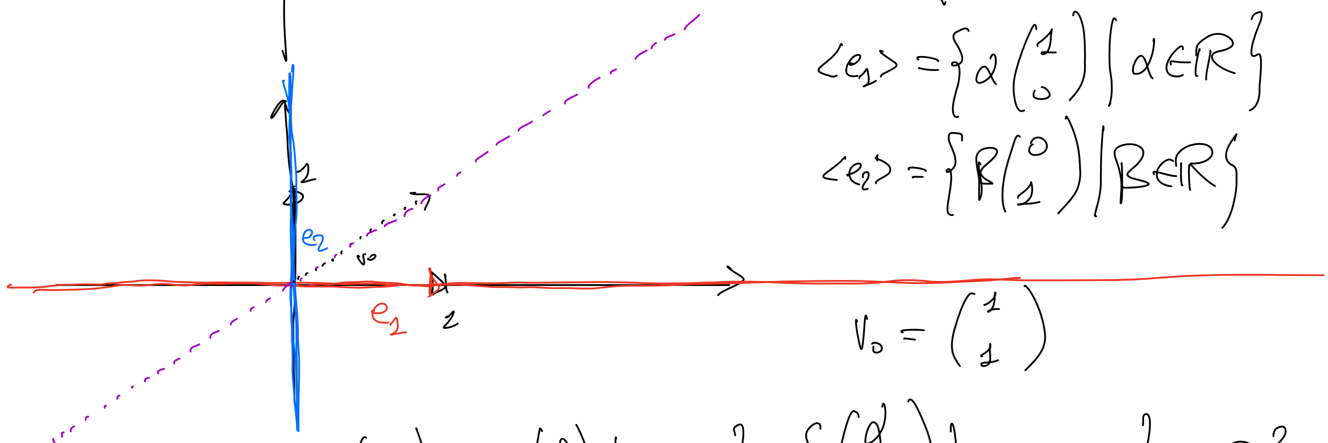


$v \in \mathbb{R}^2 \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\langle e_1 \rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

$\langle e_2 \rangle = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \beta \in \mathbb{R} \right\}$



$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

IN GENERALE IN $\mathbb{R}^n$ SI INDICA CON e_j IL VETTORE CHE HA TUTTI ZERO ECCETTO LA j-ESIMA COMPONENTE.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \dots, \; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

TALI VETTORI SI CHIAMANO I VETTORI STANDARD DI $\mathbb{R}^n$ E

$\forall\, v \in \mathbb{R}^n \quad \exists!\; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$v = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \dots + c_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$0 \qquad 0 \qquad 1 \qquad -m$

DEF: Sia $A \in \mathcal{M}(m \times k)$ e sia $v \in \mathbb{R}^k$. Definisco $A \cdot v$ il vettore

$$A \cdot v = v_1 A_1 + v_2 A_2 + \dots + v_k A_k$$

A_1: la prima colonna di A

$$A = \left(A_1 \,\middle|\, A_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, A_k \right) \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}$$

$$A \cdot v = v_1 \begin{pmatrix} A_1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} A_2 \end{pmatrix} + \dots + v_k \begin{pmatrix} A_k \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot V = \begin{pmatrix} \underline{1\cdot 2 + 0\cdot 1 + 1\cdot 2} \\ \\ \underline{0\cdot 2 + 1\cdot 1 + 0\cdot 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow q=1 \\ \\ \leftarrow q=2 \end{array}$$

$$(A\cdot V)_q = \sum_{j=1}^{k} A_{qj} V_j \qquad q = 1, \dots, m$$

$A \in \mathcal{M}(m \times k)$

$V \in \mathcal{M}(k \times 1)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot V = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 3 \\ 0\cdot 2 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Se $u, v \in \mathbb{R}^m$ $\qquad u \in \mathcal{M}(m \times 1)$

$v \in \mathcal{M}(m \times 1)$

$$\underset{1\times m}{u^T} \cdot \underset{m \times 1}{v} = \sum_{j=1}^{m} u_j v_j \in \mathbb{R} \quad (1 \times 1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1$$

$$v^T \cdot v = \sum_{j=1}^{m} v_j^2 = \text{NORMA EUCLIDEA} = \underline{\|v\|}$$

$$\|v\| = v^T \cdot v = \sum_{j=1}^{m} v_j^2$$

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v^T \cdot v = 2^2 + 1^2 = 5$$