## Definizione (Equazione Lineare)

Un'equazione lineare nelle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è un'equazione che può essere scritta come

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sono chiamati i coefficienti e $b \in \mathbb{R}$ è il termine costante dell'equazione.

## Esempio

- $3x_1 - 7x_2 + x_3 = 9$ è un'equazione lineare
- $8x_1 - 2x_3 = x_2 + 1$ è un'equazione lineare
- $8x_1 + 2x_2^2 = 5$ NON è un'equazione lineare
- $2x_1 - x_1x_2 = 0$ NON è un'equazione lineare

## Definizione (Sistema Lineare)

Un sistema di equazioni lineari è un insieme di $m$ equazioni lineari nelle stesse $n$ variabili $x_1, \ldots, x_n$ che possono essere scritte come

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Diciamo che il sopra insieme di equazioni è un sistema lineare di $m$ equazioni in $n$ incognite

### Definizione

Una soluzione del sistema lineare

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

è un insieme di $n$ valori $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ tale che ogni uguaglianza nel sistema, sia valida se sostituiamo $x_i$ con $s_i$, per ogni $i = 1, \ldots, n$.

Un'equazione lineare in due variabili ha la forma

$$ax + by = c$$

Quando almeno uno tra $a$ e $b$ non è zero, questa è l'equazione di una linea nel piano $xy$, diciamo $\mathcal{L}$

Consideriamo ora un sistema

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \qquad \text{equazione della linea } \mathcal{L}_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \qquad \text{equazione della linea } \mathcal{L}_2 \end{aligned}$$

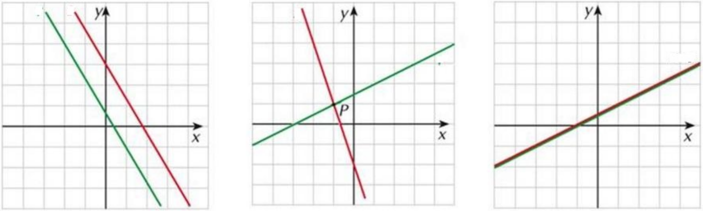
**Definizione**

Una soluzione di un sistema di due equazioni in due variabili è una coppia $(s_1, s_2)$ che rappresenta le coordinate di un punto che giace sia su $\mathcal{L}_1$ che su $\mathcal{L}_2$.

Tre possibili situazioni:

1. $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ sono parallele: Nessuna soluzione
2. $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ si intersecano in un punto: Soluzione unica
3. $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ sono la stessa linea: Infinite soluzioni

## Interpretazione geometrica




Nel caso 1 diciamo che il sistema è inconsistente

Nei casi 2 e 3 diciamo che il sistema è consistente

Queste definizioni si estendono a qualsiasi dimensione!

# Sistemi di equazioni in forma matriciale

Considera il sistema

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 &= 5 \\
7x_1 - 2x_2 &= 2
\end{aligned}
$$

Definisci

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Possiamo riscrivere il sistema usando la forma di moltiplicazione matrice-vettore:

$$A\mathrm{x} = \mathrm{b}$$

## Sistemi di equazioni in forma matriciale

Considera un sistema lineare

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Allora il sistema può essere scritto nella forma equivalente

$$A\mathrm{x} = \mathrm{b}$$

## Sistema omogeneo

Un sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}$$

è detto omogeneo.

**Teorema**

Un sistema omogeneo è sempre consistente.

Dimostrazione: Un sistema omogeneo ha sempre la soluzione $s = (0, \cdots, 0)$, detta **soluzione banale**. Tuttavia, può anche avere altre soluzioni non banali.

### Esempio

$$x_1 + x_2 = 1$$
$$3x_2 = 6$$

Possiamo risolvere l'ultima equazione per $x_2$ e sostituire dal basso verso l'alto

### Esempio

$$2x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + 3x_2 = 6$$

Non così immediato!

Idea: eseguire operazioni LEGITTIME per ottenere una forma a *triangolo* come nel primo esempio.

Queste operazioni legittime sono chiamate Operazioni Elementari sulle Righe (ERO)

Ci sono ERO di tre tipi:

- TIPO 1: Scambiare due righe qualsiasi di una matrice (SCAMBIO)
- TIPO 2: Moltiplicare tutti gli elementi di una riga per la stessa costante (SCALATURA)
- TIPO 3: Aggiungere una riga ad un'altra riga (ADDIZIONE)

### Definizione (Matrice aumentata)

Considera un sistema della forma $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$, dove $A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^m$. Definiamo la matrice aumentata $\widetilde{A} = [A\mathrm{b}] \in \mathcal{M}(m \times (n+1))$ come la matrice le cui prime $n$ colonne sono le colonne di $A$ e l'ultima colonna è il vettore b

- Se le ERO vengono eseguite sulla matrice aumentata di un sistema otteniamo un sistema equivalente a quello originale, cioè hanno le stesse soluzioni
- Vogliamo applicare le ERO per ottenere una *scala*
- La matrice a scala è chiamata Forma a Gradini

Chiamiamo elemento principale di una riga il primo elemento non nullo *da sinistra*

Procedura di risoluzione per sistemi lineari:

1. Scrivere la matrice aumentata $\widetilde{A} = [Ab]$
2. Trovare la Forma a Gradini $[Rc]$
3. Se l' elemento principale dell'ultima riga è nell'ultima colonna il sistema è *inconsistente*
4. Altrimenti il sistema è consistente.

## Procedimento

- Si considera la matrice completa associata al sistema.
- Si sceglie un pivot e si annullano gli elementi sotto di esso.
- Si ripete il processo per ogni colonna della matrice.

# Esempio I

- Sistema lineare dato:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$$

- Matrice completa associata:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- Procedimento di eliminazione di Gauss.

1. Scegliamo $a_{11} = 2$ come pivot.
   $R_2 \Rightarrow R_2 - \frac{3}{2}\,R_1$. $R_3 \Rightarrow R_3 - \frac{5}{2}\,R_1$. Matrice dopo il primo passaggio:

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} & 5 & -14 \\ 0 & \frac{3}{2} & 8 & -21 \end{pmatrix}$$

2. Scegliamo $a_{22} = \frac{1}{2}$ come nuovo pivot.
   $R_3 \Rightarrow R_3 - 3\,R_2$. Matrice dopo il secondo passaggio:

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} & 5 & -14 \\ 0 & 0 & -7 & 21 \end{pmatrix}$$

# Risoluzione

- Il sistema associato diventa quindi:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ \frac{1}{2}y + 5z = -14 \\ -7z = 21 \end{cases}$$

- Soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

- Sistema lineare dato:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ 3x + 4z = 7 \end{cases}$$

- Matrice completa associata:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

- Procedimento di eliminazione di Gauss.

# Passaggi di Eliminazione

1. Scegliamo $a_{11} = 1$ come pivot.
   $R_2 \Rightarrow R_2 - 2\,R_1$. $R_3 \Rightarrow R_3 - 3\,R_1$. Matrice dopo il primo passaggio:

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Scegliamo $a_{22} = -3$ come nuovo pivot.
   $R_3 \Rightarrow R_3 - R_2$. Matrice dopo il secondo passaggio:

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Risoluzione

- Il sistema associato diventa quindi:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ -3\,y + z = -2 \\ 0 \cdot z = 0 \end{cases}$$

- $z$ puó essere un qualsiasi numero! Sia quindi $z = t$, con $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y + t = 3 \\ -3\,y + t = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + t = 3 \\ y = 2/3 + t/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2/3 + t/3 + t = 3 \\ y = 2/3 + t/3 \end{cases}$$

- Soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x = 7/3 - (4/3)\,t \\ y = 2/3 + t/3 \\ z = t \end{cases}$$

Le soluzioni sono tutti i punti della retta:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists t : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dicamo quindi che esistono $\infty^1$ soluzioni.

# Esempio III

- Sistema lineare dato:

$$\begin{cases} 2x + y - z = -5 \\ 4x - 3y - 2z = -3 \\ 8x - y - 4z = 0 \end{cases}$$

- Matrice completa associata:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -5 \\ 4 & -3 & -2 & -3 \\ 8 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

- Procedimento di eliminazione di Gauss.

1. Scegliamo $a_{11} = 2$ come pivot.

   $R_2 \Rightarrow R_2 - 2\,R_1$. $R_3 \Rightarrow R_3 - 4\,R_1$. Matrice dopo il primo passaggio:

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & -5 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

2. Scegliamo $a_{22} = -5$ come nuovo pivot.

   $R_3 \Rightarrow R_3 - R_2$. Matrice dopo il secondo passaggio:

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

- Il sistema associato diventa quindi:

$$\begin{cases} 2x + y - z = -5 \\ -5\,y = 7 \\ 0 = 13 \end{cases}$$

- Sistema inconsistente!

## Esempio IV

- Sistema lineare dato:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 6x - 2y + 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

- Matrice completa associata:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Procedimento di eliminazione di Gauss.

1. Scegliamo $a_{11} = 3$ come pivot.

   $R_2 \Rightarrow R_2 - 2\,R_1$. $R_3 \Rightarrow 3\,R_3 - R_1$. Matrice dopo il primo passaggio:

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Scambiamo $R_2 \Leftrightarrow R_3$

   Matrice dopo il secondo passaggio:

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ Inconsistente.}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 2 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 11x_3 + 9x_4 - 5 = 0 \\ -x_1 - 4x_2 + 10x_3 - 5x_4 + 1 = 0 \end{cases}.$$

*Riduciamo a scalini la matrice completa:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & -11 & 9 & -5 \\ -1 & -4 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\underline{a}_2 \to \underline{a}_2 - \underline{a}_1 \\ \underline{a}_3 \to \underline{a}_3 - 2\underline{a}_1 \\ \underline{a}_4 \to \underline{a}_4 + \underline{a}_1}}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\underline{a}_2 \longleftrightarrow \underline{a}_3}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\underline{a}_4 \to \underline{a}_4 + \underline{a}_2}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\underline{a}_4 \to \underline{a}_4 + 2\underline{a}_2}{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Risolviamo a ritroso:*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 & = 0 \\ 3x_2 - 5x_3 + x_4 - 5 & = 0 \\ -x_3 + x_4 + 2 & = 0 \\ 2x_4 & = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 5 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 0 \rightarrow x_1 = 1 \\ 3x_2 - 5 \cdot 2 + 0 - 5 = 0 \rightarrow x_2 = 5 \\ -x_3 + 0 + 2 = 0 \rightarrow x_3 = 2 \\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

*Dunque il sistema ha un'unica soluzione:* $(1, 5, 2, 0)$.

## Esempio VI

- Sistema lineare dato:

$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x + (1/2)\,y - (1/2)\,z = -1/2 \\ -2x - y + z = 1 \end{cases}$$

- Matrice completa associata:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Procedimento di eliminazione di Gauss.

1. Scegliamo $a_{11} = 2$ come pivot.
   $R_2 \Rightarrow R_2 - (1/2)\, R_1$. $R_3 \Rightarrow R_3 + R_1$. Matrice dopo il primo passaggio:

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Il sistema associato diventa quindi:

$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

## Esempio VI

$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Non abbiamo vincoli su due variaibli. Poniamo $z = t$ e $y = s$ e otteniamo $x = -1/2 - s/2 + t/2$. Quindi lo spazio delle soluzioni é

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \exists s, t : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dicamo quindi che esistono $\infty^2$ soluzioni.

# Conclusione

- Il metodo di eliminazione di Gauss è un potente strumento per risolvere sistemi lineari.
- Trasforma sistemi complessi in forme più gestibili.
- Permette di trovare soluzioni in modo sistematico e ordinato.

### Definizione

Una combinazione lineare di vettori $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_n \in \mathbb{R}^k$ è un vettore della forma

$$\mathrm{v} = c_1\mathrm{u}_1 + c_2\mathrm{u}_2 + \cdots + c_n\mathrm{u}_n \in \mathbb{R}^k$$

per scalari $c_1, c_2, \ldots, c_n$, che sono chiamati i coefficienti della combinazione lineare.

Se vi sono dati vettori $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_n \in \mathbb{R}^k$ e costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$, è facile calcolare la combinazione lineare

$$\mathrm{v} = c_1\mathrm{u}_1 + c_2\mathrm{u}_2 + \cdots + c_n\mathrm{u}_n \in \mathbb{R}^k$$

Che dire dell'invertire questa procedura?

Supponiamo che vi siano dati vettori $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^k$ e $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \dots, \mathrm{u}_n \in \mathbb{R}^k$. Potete dirmi se esistono coefficienti $c_1, c_2, \dots, c_n$, tali che

$$\mathrm{v} = c_1 \mathrm{u}_1 + c_2 \mathrm{u}_2 + \cdots + c_n \mathrm{u}_n \in \mathbb{R}^k?$$

**Esempio (Un caso semplice)**

Ogni vettore $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^k$ è una combinazione lineare dei vettori standard $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \dots, \mathrm{e}_k \in \mathbb{R}^k$,

$$\mathrm{v} = v_1 \mathrm{e}_1 + v_2 \mathrm{e}_2 + \cdots + v_k \mathrm{e}_k \in \mathbb{R}^k$$

Nel caso generale la risposta a questa domanda comporta la risoluzione di un sistema!

## Esempio

Sia dato $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Trovare $c_1$ e $c_2$ tali che

$$v = c_1\, u_1 + c_2\, u_2$$

con $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dobbiamo quindi imporre che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\, c_1 - c_2 \\ 3\, c_1 + 2\, c_2 \end{pmatrix}$$

ovvero risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2\, c_1 - c_2 = 1 \\ 3\, c_1 + 2\, c_2 = -1 \end{cases}$$

### Definizione (Indipendenza Lineare)

Sia $n \leq k$. Un insieme di vettori $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n \in \mathbb{R}^k$ è detto linearmente indipendente se e solo se

$$c_1\mathrm{v}_1 + c_2\mathrm{v}_2 + \cdots + c_n\mathrm{v}_n = \mathrm{o}_k$$

implica che $c_1, c_2, \ldots, c_n$ siano TUTTI uguali a zero. In questo caso diciamo che $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n \in \mathbb{R}^k$ sono linearmente indipendenti.

**Esempio.** I vettori $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ formano l'insieme $\{e_1, e_2\}$ di vettori linearmente indipendenti.

**Definizione (Indipendenza Lineare)**

Sia $n \leq k$. I vettori $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \dots, \mathrm{v}_n \in \mathbb{R}^k$ sono linearmente indipendenti se e solo se il sistema di equazioni lineari

$$V\mathrm{c} = \mathrm{o}_k \text{ con } V = (v_1 | v_2 | \cdots | v_n)$$

ha SOLO la soluzione banale.

Infatti sappiamo che

$$V\mathrm{c} = c_1\, v_1 + c_2\, v_2 + \cdots + c_n\, v_n.$$

Quindi se esiste $c^\star \neq 0$ tale che $V\, c^\star = 0$ avremmo che

$$c_1^\star\, v_1 + c_2^\star\, v_2 + \cdots + c_n^\star\, v_n = 0$$

con **non tutti** i coefficienti $c_j^\star$ uguali a zero.

**Definizione (Indipendenza Lineare)**

Sia $n \leq k$. I vettori $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n \in \mathbb{R}^k$ sono linearmente indipendenti se e solo se non è possibile esprimere alcun vettore nel set come una combinazione lineare degli altri.

### Definizione (Dipendenza Lineare)

Un insieme di vettori $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n \in \mathbb{R}^k$ è detto linearmente dipendente se esistono costanti $c_1, c_2, \ldots, c_n$ NON TUTTE UGUALI A ZERO tali che

$$c_1\mathrm{v}_1 + c_2\mathrm{v}_2 + \cdots + c_n\mathrm{v}_n = \mathrm{o}_k.$$

In questo caso diciamo che $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n \in \mathbb{R}^k$ sono linearmente dipendenti.

Definizioni equivalenti:

**Definizione (Dipendenza Lineare)**

I vettori $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n \in \mathbb{R}^k$ sono linearmente dipendenti se e solo se il sistema di equazioni lineari

$$V\mathrm{c} = \mathrm{o}_k$$

ha infinite soluzioni NON BANALI.

**Definizione (Indipendenza Lineare)**

I vettori $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n \in \mathbb{R}^k$ sono linearmente dipendenti se e solo se almeno un vettore nel set è una combinazione lineare degli altri.

### Definizione (Sottospazio vettoriale)

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^k$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^k$ (anche il caso $V = \mathbb{R}^k$ é contemplato). Se é vero che $\forall u, v \in V$ si ha $\alpha\, u + \beta\, v \in V$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e che $0 \in V$, allora tale insieme si chiama sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^k$.

### Definizione (Base di un sottospazio vettoriale)

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^k$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^k$.

- Un insieme di vettori $\{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ di $V$ si dice un sistema di generatori di $V$ se e soltanto se per ogni $\mathrm{v} \in V$ esistono coefficienti $\{c_1, \cdots, c_n\}$ tali che
$$\mathrm{v} = c_1\, \mathrm{v}_1 + \cdots + c_n\, \mathrm{v}_k.$$
- Una base per $V$ é un insieme di elementi $\mathcal{B} \doteq \{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ di $V$ tali che 1) l'insieme $\mathcal{B}$ é un sistema di generatori di $V$ e 2) tutti gli elementi di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti.

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^k$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^k$ (anche il caso $V = \mathbb{R}^k$ é contemplato). Allora:

### Osservazione

- Le basi di $V$ hanno tutti lo stesso numero di elementi.
- Tale numero di elementi si chiama dimensione dello spazio e si indica $\dim(V)$.
- Se $V \subset \mathbb{R}^k$ allora $\dim(V) < k$.
- Se $V = \mathbb{R}^k$ allora $\dim(V) = k$. Quindi ci sono al piú $k$ vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^k$.

Si consideri lo spazio $\mathbb{R}^k$. Allora una base é data data

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

### Definizione (Span di un insieme di vettori)

Siano $\{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ vettori di $\mathbb{R}^k$ linearmente indipendenti, quindi $n \leq k$. Si chiama sotto-spazio generato dai vettori (o span dei vettori) $\{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ il sottospazio di $\mathbb{R}^k$ definito come

$$\langle \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n \rangle = \left\{ \mathrm{v} \in \mathbb{R}^k \;\middle|\; \exists c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R} : \mathrm{v} = c_1\,\mathrm{v}_1 + \cdots + c_n\,\mathrm{v}_n \right\}$$

**Osservazione:** avendo richiesto, nella definizione, che i vettori siano linearmente indipendenti, se ne deduce che

$$\dim \langle \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n \rangle = n.$$

**Esempio:** Il sottospazio

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

concide col piano $x - y$ di $\mathbb{R}^3$.

### Definizione (Rango)

Sia $A \in \mathcal{M}(m \times n)$. Definiamo il Rango di $A$, $r(A)$, come il numero massimo di colonne linearmente indipendenti.

Definizione equivalente:

### Definizione (Rango)

Sia $A \in \mathcal{M}(m \times n)$. Definiamo il Rango di $A$, $r(A)$, come il numero massimo di righe linearmente indipendenti.

### Osservazione

Secondo la definizione abbiamo che $r(A) \leq \min\{m, n\}$

**Definizione (Rango: definizione equivalente.)**
Sia $A \in \mathcal{M}(m \times n)$. Definiamo il Rango di $A$, $r(A)$, come la dimensione del sottospazio generato dalle colonne.

**Definizione (Rango: definizione equivalente.)**
Sia $A \in \mathcal{M}(m \times n)$. Definiamo il Rango di $A$, $r(A)$, come la dimensione del sottospazio generato dalle righe.

**Osservazione.** Da una qualsiasi delle definizioni (equivalenti) di rango si deduce che $r(A) = 0$ se e soltanto se $A = 0$. Quindi se $A \neq 0$ deve essere $1 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$.

## Teorema di Kronecker

### Teorema

Sia $A \in \mathcal{M}(m \times n)$ una matrice, $A \neq 0$. Allora $r(A) = r$, con $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$, se le seguenti due condizioni sono soddisfatte:

1. Esiste $B$ sottomatrice quadrata $r \times r$ di $A$ con determinante non nullo;
2. Tutte le sottomatrici quadrate $(r+1) \times (r+1)$ di $A$, ottenute aggiungendo a $B$ una qualsiasi riga e colonna, hanno determinante uguale a zero.

**Osservazione**. Se tutte le sottomatrici quadrate $(r+1) \times (r+1)$ di $A$, ottenute aggiungendo a $B$ una qualsiasi riga e colonna, hanno determinante uguale a zero, allora lo avranno anche tutte quelle $(r+2) \times (r+2)$, etc etc ...

Usando il Teorema di Kronecker calcolare il rango della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Notiamo subito che $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ é tale che $\det(B) = -9 \neq 0$, quindi $r(A) \geq 2$. É vero che $r(A) = 3$ ? Consideriamo tutte le sottomatrici $3 \times 3$ di $A$ ottenute da $B$ aggiungendo o una riga o una colonna.

Abbiamo solo due possibili casi:

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(B^{(1)}\right) = -3\,(12+0)+2\,(3+15) = -36+36 = 0$$

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(B^{(2)}\right) = -3\,(9+3)+2\,(3+15) = -36+36 = 0$$

per cui deve essere $r\,(A) = 2$.

**Conseguenza importante del Teorema di Kronecker**

Sia $A \in \mathcal{M}(n \times n)$. Allora $r(A) = n$ se e solo se $\det(A) \neq 0$.

Infatti se $\det(A) \neq 0$ allora è sufficiente considerare $A$ stessa come sottomatrice e Kronecker ci dice che $r(A) = n$.

Viceversa se $r(A) = n$ deve essere per forza $\det(A) \neq 0$ perché se fosse $\det(A) = 0$ il teorema di Kronecker implicherebbe $r(A) < n$.

Come calcolare il rango di una matrice? Oltre che Kronecker anche tramite l'algoritmo di Gauss:

- Le ERO non cambiano il rango di una matrice!
- Data una matrice $A$, trovo dunque la sua Forma a Scalini.
- Il rango di $A$ è il numero di elementi principali nella Forma a Scalini.

Si calcoli, al variare di $k$, il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ k & -1 & 1 \\ 4 & k & 2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo, prima di tutto, per quali valori $\det(A) \neq 0$ (rango massimo).

$$\begin{aligned} \det(A) &= -2\,(-2-k) - k\,(-4+k) + 4\,(-2+1) \\ &= 4 + 2\,k + 4\,k - k^2 - 8 - 4 \\ &= -k^2 + 6\,k - 8 = (k-2)\,(k-4)\,. \end{aligned}$$

Quindo per $k \neq 2$ e $k \neq 4$ si ha che $r\,(A) = 3$. Vediamo cosa succede per $k = 2$ e $k = 4$.

## Calcolo del rango: esercizio

Per $k = 2$ abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Applico Gauss. $R_2 \Rightarrow R_2 + R_1$, $R_3 \Rightarrow R_3 + 2\,R_1$, ottenendo:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Applico ancora Gauss. $R_3 \to R_3 + \frac{2}{3}\,R_2$, ottenendo:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui $r\,(A) = 2$.

Per $k = 4$ abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Applico Gauss. $R_2 \Rightarrow R_2 + 2\,R_1$, $R_3 \Rightarrow R_3 + 2\,R_1$, ottenendo:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui $r\,(A) = 2$.

Si calcoli, al variare di $k$, il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ -1 & k & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Applichiamo Gauss. $R_3 \Rightarrow R_3 + R_1$, ottenendo:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & k & 1-k & 1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \Rightarrow R_3 - k\,R_2$, ottenendo:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1-k & 1-k^2 \end{pmatrix}$$

Avendo ottenuto la matrice

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1-k & 1-k^2 \end{pmatrix}$$

notiamo che le prime due righe hanno un elemento principale diverso da zero, a prescindere da $k$. Consideriamo quindi $a_{33} = 1 - k$. Se $k = 1$ si ha

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $r(A) = 2$. Se $k \neq 1$ si ha $a_{33} \neq 0$ e quindi $r(A) = 3$.

Si calcoli, al variare di $k$ e $h$, il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 2 & 0 & k & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Applichiamo Gauss. $R_2 \Rightarrow R_2 - 2\,R_1$, ottenendo:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 0 & 2 & k & -2\,k+2 \\ 0 & h & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 \Rightarrow R_3 - (h/2)\,R_2$, ottenendo:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 0 & 2 & k & -2\,k+2 \\ 0 & 0 & -h\,k/2 & h\,(k-1) \end{pmatrix}$$

Avendo ottenuto quindi

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 0 & 2 & k & -2\,k+2 \\ 0 & 0 & -h\,k/2 & h\,(k-1) \end{pmatrix}$$

notiamo che le prime due righe hanno un elemento principale diverso da zero, a prescindere da $h$ e $k$. Consideriamo quindi $a_{33}$. Se $h = 0$ si ha

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 0 & 2 & k & -2\,k+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi $r\,(A) = 2$. Se $h \neq 0$, allora se $k = 0$ si ha

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -h \end{pmatrix}$$

e quindi la matrice ha tre elementi principali: $1$, $2$ e $-h \neq 0$, per cui $r\,(A) = 3$.

Continua...

Se invece $h \neq 0$ e $k \neq 0$ si ha

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 0 & 2 & k & -2\,k+2 \\ 0 & 0 & -h\,k/2 & h\,(k-1) \end{pmatrix}$$

quindi la matrice ha tre elementi principali che sono $1$, $2$ e $-h\,k/2 \neq 0$, quindi $r\,(A) = 3$, anche se $k = 1$.

**Proposizione**

Siano $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n \in \mathbb{R}^k$ vettori e sia $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^k$ una combinazione lineare di $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n$. Sia $V$ la matrice con colonne $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ e $\widetilde{V}$ la matrice con colonne $\{\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_n, \mathrm{b}\}$. Allora

$$r(V) = r(\widetilde{V})$$

*Dim.* Sia $\mathrm{b} = a_1 \mathrm{v}_1 + \cdots + a_n \mathrm{v}_n$. Si ha che

$$\langle \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n \rangle = \langle \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n, \mathrm{b} \rangle$$

infatti se $v \in \langle \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n \rangle$ allora

$$\begin{aligned} v &= c_1 \mathrm{v}_1 + \cdots + c_n \mathrm{v}_n \\ &= (c_1 - a_1)\mathrm{v}_1 + \cdots + (c_n - a_n)\mathrm{v}_n + a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \\ &= c_1' \mathrm{v}_1 + \cdots + c_n' \mathrm{v}_n + b \in \langle \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n, \mathrm{b} \rangle \qquad (5.1) \end{aligned}$$

continua ....

Se invece $v \in \langle \mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_n, b\rangle$ allora

$$\begin{aligned} v &= c_1\,\mathrm{v}_1 + \cdots + c_n\,\mathrm{v}_n + \beta\, b \\ &= c_1\,\mathrm{v}_1 + \cdots + c_n\,\mathrm{v}_n + \beta\,(a_1\,\mathrm{v}_1 + \cdots + a_n\,\mathrm{v}_n) \\ &= c'_1\,\mathrm{v}_1 + \cdots + c'_n\,\mathrm{v}_n \in \langle \mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_n\rangle \end{aligned} \tag{5.2}$$

avendo posto $c'_j = c_j + \beta\, a_j$, $j = 1, \dots, n$. Quindi essendo

$$\langle \mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_n\rangle = \langle \mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_n, \mathrm{b}\rangle$$

abbiamo $\dim\langle \mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_n\rangle = \dim\langle \mathrm{v}_1, \dots, \mathrm{v}_n, \mathrm{b}\rangle$ e quindi $r(V) = r(\widetilde{V})$. $\square$

**Teorema (Rouché-Capelli)**

Consideriamo un sistema $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ di $m$ equazioni e $n$ incognite, con $m \leq n$.
Il sistema è consistente se e solo se $rank(A) = rank(\widetilde{A})$.
Se il sistema è consistente, sia $r = rank(A) = rank(\widetilde{A})$. Allora esso ha

a. una soluzione unica se $r = n$
b. $\infty^{n-r}$ soluzioni se $r < n$

IMPORTANTE: questo teorema è fondamentale per risolvere sistemi parametrici!!

**Problema.** Si studi la compatibilitá del sistema parametrico:

$$\begin{cases} k^2 x - y - z = 1 \\ x - y - z = -k \end{cases}$$

al variare del parametro reale $k$.

**Soluzione.** La matrice incompleta $A$ e la matrice completa $(A|b)$ sono date da

$$A = \begin{pmatrix} k^2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A|b) = \begin{pmatrix} k^2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -k \end{pmatrix}$$

Per applicare Rouché-Capelli ci calcoliamo il rango di $A$ e il rango di $(A|b)$.

Calcolo del rango di

$$A = \begin{pmatrix} k^2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. $A \in \mathcal{M}(2 \times 3)$ allora $r(A) = 1$ o $r(A) = 2$.
2. Le due sottomatrici di ordine $2 \times 2$ sono

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} k^2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. $\det(A_1) = 0$ e $\det(A_2) = -k^2 + 1$.
4. Se $k^2 - 1 = 0$ ovvero se $k = \pm 1$ abbiamo che $\det(A_1) = \det(A_2) = 0$ e quindi $r(A) = 1$. Se invece $k \neq \pm 1$ abbiamo una sottomatrice $2 \times 2$ con determinante non-nullo e quindi deve essere $r(A) = 2$ (rango massimo).

Calcolo del rango di

$$(A|b) = \begin{pmatrix} k^2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -k \end{pmatrix}$$

1. Essendo $(A|b)$ una matrice non-nulla $2 \times 4$ il suo rango può essere solo 1 o 2.
2. Essendo $A$ una sottomatrice di $(A|b)$ quando il rango di $A$ é massimo (ovvero 2) lo é anche il rango di $(A|b)$.
   Per cui $k \neq \pm 1 \Rightarrow r\,(A|b) = 2$.

Vediamo cosa accade per $k = 1$ e $k = -1$.

Caso $k = 1$.

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. La sottomatrice formata dalle ultime due colonne é tale che
$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2.$$
2. Quindi $r\,(A|b) = 2$

Caso $k = -1$.

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

avendo la matrice due righe identiche si ha $r\,(A|b) = 1$.

Riassunto.

$$A = \begin{pmatrix} k^2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A|b) = \begin{pmatrix} k^2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -k \end{pmatrix}$$

1. Per $k = 1$ abbiamo $r\,(A|b) = 2$ e $r\,(A) = 1$. Il sistema é inconsistente.
2. Per $k = -1$ abbiamo $r\,(A) = r\,(A|b) = 1$. Il sistema é consistente con $\infty^{3-1} = \infty^2$ soluzioni.
3. Per $k \neq 1$ e $k \neq -1$ abbiamo $r\,(A) = r\,(A|b) = 2$. Il sistema é consistente con $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

Esempio di soluzione. Per $k = -1$ abbiamo

$$\widetilde{A} = (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Facendo $R_2 \to R_2 - R_1$ otteniamo

$$\widetilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Ponendo $y = s$ e $z = t$ abbiamo $x = 1 + s + t$. Le soluzioni sono quindi

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

**Problema.** Si studi la compatibilitá del sistema parametrico:

$$\begin{cases} x + y + k\,z = 2 \\ x + y + 3\,z = k - 1 \\ 2\,x + k\,y - z = 1 \end{cases}$$

al variare del parametro reale $k$.

**Soluzione.** La matrice incompleta $A$ e la matrice completa $(A|b)$ sono date da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & k & -1 \end{pmatrix}, \quad (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & 3 & k-1 \\ 2 & k & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per applicare Rouché-Capelli ci calcoliamo il rango di $A$ e il rango di $(A|b)$.

Calcolo del rango di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & k & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice é quadrata, quindi ne calcolo il determinante.

$$\det(A) = k^2 - 5\,k + 6 = 0 \Leftrightarrow k = 2, k = 3.$$

Quindi se $k \neq 2$ e $k \neq 3$ allora $\det(A) \neq 0$ quindi $r(A) = 3$ che é il rango massimo.

Essendo $A$ una sottomatrice $3 \times 3$ della matrice $(A|b)$, che é un matrice $3 \times 4$, abbiamo che per questi valori $r(A) = 3$, e quindi il sistema é compatibile (o consistente) con soluzione unica.

Caso $k = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che $r(A) < 3$. Inoltre

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 6 = -7 \neq 0$$

Quindi $r(A) = 2$. Inoltre, sempre per $k = 2$, abbiamo

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -8 \neq 0$$

Quindi $r(A|b) = 3 > r(A)$ e il sistema è inconsistente (o incompatibile).

Caso $k = 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che $r(A) < 3$. Inoltre

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = -1 - 9 = -10 \neq 0$$

Quindi $r(A) = 2$. Inoltre, sempre per $k = 3$, abbiamo

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Essendoci due righe uguali il rango non puó essere 3. La sottomatrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ha determinante non-nullo, quindi $r(A|b) = 2 = r(A) \Rightarrow \infty^2$ soluzioni.