RANGO DI UNA MATRICE

1) NUMERO MASSIMO DI COLONNE LINEARMENTE INDIPENDENTI
2) " " " RIGHE " "
3) DIMENSIONE DELLO SPAZIO GENERATO DALLE COLONNE
4) " " " " DALLE RIGHE
5) $A \in \mathcal{M}(m \times m)$ ALLORA $r(A) = m \iff \det(A) \neq 0$

ESERCIZIO: $$A = \begin{pmatrix} -2 & \boxed{\begin{matrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix}} \\ k & \\ \boxed{4} & k \quad 2 \end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}$$

SI CALCOLI IL $r(A)$ AL VARIARE DI $k \in \mathbb{R}$

SOLUZIONE: A È QUADRATA 3X3 QUINDI POSSO CALCOLARE IL DETERMINANTE. $(-1)^{1+j}$

$$\cancel{\det(A) = (-2)\cdot[-2-k] - k[-4+k] + 4[-2+1] =}$$
$$\cancel{= 2(k+2) + k(4-k) - 4 = 2k + \cancel{4} + 4k - k^2 - \cancel{4}}$$
$$\cancel{= 6k - k^2 = k(6-k) = 0} \begin{cases} k = 6 \\ k = 0 \end{cases}$$

$$\det(A) = -k^2 + 6k - 8 = (k-2)\cdot(k-4) \qquad \begin{matrix} k=2 \\ k=4 \end{matrix}$$

SE $k \neq 2$ E $k \neq 4 \Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$

$$k=2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} R_2 \to R_2 + R_1 \\ R_3 \to R_3 + 2R_1 \end{array}\right\} \Rightarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2-2 & -1-2 & 1-1 \\ 4-4 & 2-4 & 2-2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 + \frac{2}{3}R_2 \Rightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k=4 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad r(A) \to \cancel{0},\ 1,\ 2,\ \cancel{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} R_2 \to R_2 + 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + 2R_1 \end{array}\right\} \Rightarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 4-4 & -1-4 & 1-2 \\ 4-4 & 4-4 & 2-2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$k = 4 \Rightarrow r(A) = 2$

ESERCIZIO: SI CALCOLI AL VARIARE DI k IL RANGO DELLA MATRICE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ -1 & k & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 + R_1 \Rightarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & k & 1-k & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - kR_2 \Rightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & k-k & 1-k & 1-k^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 1 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 0 & 0 & \boxed{1-k} & 1-k^2 \end{pmatrix}$$

SE $k \neq 1 \Rightarrow 1-k \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$

SE $k=1 \Rightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$r(A) = 2$

ESERCIZIO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 2 & 0 & k & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SI DETERMINI IL $r(A)$ AL VARIARE DI $h, k \in \mathbb{R}$

$$R_2 \to R_2 - 2R_1 \Rightarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 2-2 & 0+2 & k & -2k+2 \\ 0 & h & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 0 & 2 & k & 2-2k \\ 0 & \boxed{h} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_2 - \frac{h}{2} R_2 \Rightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 0 & 2 & k & 2-2k \\ 0 & h-\frac{h}{2}2 & 0-\frac{h}{2}k & 0-\frac{h}{\cancel{2}}(\cancel{2}-\cancel{2}k) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & k-1 \\ 0 & 2 & k & 2(1-k) \\ 0 & 0 & -\frac{hk}{2} & h(k-1) \end{pmatrix}$$

SE $\boxed{h=0}$ $\quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & k-1 \\ 0 & 2 & k & 2(1-k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $r(A)=2$ $\forall k$

SE $h \neq 0$ MA $k=0$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -h \end{pmatrix} \quad r(A)=3$$

SE $h \neq 0$ MA $k=1$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{h}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad r(A)=3$$

SE $h \neq 0$ E $k \neq 0$ E $k \neq 1 \Rightarrow r(A) = 3$

TEOREMA: SIANO $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^k$. SIA $b \in \mathbb{R}^k$ COMBINAZIONE LINEARE DI $v_1, \dots, v_m$. SIA V LA MATRICE CHE HA COME COLONNE $v_1, \dots, v_m$. OVVERO

$$V = (v_1 | v_2 | \dots | v_m)$$

SIA $\tilde{V}$ LA MATRICE LE CUI COLONNE SONO $v_1, \dots, v_m, b$. OVVERO

$$\tilde{V} = (v_1 | v_2 | \dots | v_m | b)$$

ALLORA $r(V) = r(\tilde{V})$

DIM: È SUFFICIENTE DIMOSTRARE CHE

$$\boxed{\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_m, b \rangle}$$

PERCHÉ

$$r(V) = \dim(\langle v_1, \dots, v_m \rangle)$$

$$r(\tilde{V}) = \dim(\langle v_1, \dots, v_m, b \rangle)$$

SIA $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$. POICHÉ b (x IPOTESI) È LINEARMENTE DIPENDENTE DA $v_1, \dots, v_m$ ALLORA $\exists$ COEFFICIENTI $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$b = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

$\exists\, c_1, \dots, c_m$ TALI CHE $v = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m =$

$$= (c_1 - a_1 + a_1) v_1 + (c_2 - a_2 + a_2) v_2 + \dots + (c_m - a_m + a_m) v_m$$

$$= (c_1 - a_1) v_1 + (c_2 - a_2) v_2 + \dots + (c_m - a_m) v_m + \underline{a_1 v_1 + \dots + a_m v_m}$$

$$v = c_1' v_1 + c_2' v_2 + \dots + c_m' v_m + b \Rightarrow \underline{v \in \langle v_1, \dots, v_m, b \rangle}$$

SIA $v \in \langle v_1, \dots, v_m, b \rangle \Rightarrow v = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m + \beta b =$

$= c_1 v_1 + \dots + c_n v_n + \beta a_1 v_1 + \beta a_2 v_2 + \dots + \beta a_n v_n$

$= (c_1 + \beta a_1) v_1 + (c_2 + \beta a_2) v_2 + \dots + (c_n + \beta a_n) v_n$

$\Rightarrow v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

SIA $A \in \mathcal{M}(m \times n)$ CON $m \leq n$

$b \in \mathbb{R}^m$

NOTIAMO CHE $x \in \mathbb{R}^n$ É SOLUZIONE DEL SISTEMA LINEARE

$$A \cdot x = b$$

SE E SOLO SE $b \in \langle A_1, \dots, A_n \rangle$

$$A \cdot x = x_1 \cdot A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = b$$

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI: SIA $A \in \mathcal{M}(m \times n)$ SIA $b \in \mathbb{R}^m$, $m \leq n$

SIA $\tilde{A} = (A \mid b)$. ALLORA DATO IL SISTEMA LINEARE

$$A \cdot x = b$$

ESSO É CONSISTENTE $\Leftrightarrow r(A) = r(\tilde{A}) = r(A \mid b)$

SE IL SISTEMA É CONSISTENTE SIA $r = r(A) = r(A \mid b)$

ALLORA:

1) SE $r = n$ $(m = n)$ ALLORA LA SOLUZIONE É UNICA INFATTI $\exists A^{-1}$ QUINDI

$$x = A^{-1} b \text{ É L'UNICA SOLUZIONE}$$

2) SE $r < n$ ALLORA CI SONO ∞^{n-r} SOLUZIONI

ESERCIZIO: SI STUDI LA COMPATIBILITÀ DEL SISTEMA LINEARE PARAMETRICO

$$\begin{cases} k^2x - y - z = 1 \\ x - y - z = -k \end{cases} \qquad \begin{matrix} m = 2 \\ n = 3 \end{matrix}$$

AL VARIARE DEL PARAMETRO $k \in \mathbb{R}$

SOLUZIONE: SCRIVO A E $\tilde{A} = (A|b)$ $\quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -k \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} k^2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \tilde{A} = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} k^2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -k \end{array}\right)$$

1) CALCOLO IL RANGO DI A. $\quad r(A) \to \cancel{0},\ 1,\ 2$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_1) = 0$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} k^2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = k^2 - 1$$

SE $k = +1$, $k = -1 \Rightarrow \det(A_2) = 0$ QUINDI PER LA REGOLA DI KRONECKER ABBIAMO $r(A) = 1$

SE $k \neq +1$ E $k \neq -1 \Rightarrow \det(A_2) \neq 0 \Rightarrow \exists$ UNA SOTTO-MATRICE 2x2 CON DETERMINANTE NON-NULLO MA ALLORA IL RANGO DEVE ESSERE 2 $\Rightarrow r(A) = 2$

2) CALCOLO IL RANGO $(A|b) = \tilde{A}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} k^2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -k \end{pmatrix}$$

ESSENDO A UNA SOTTOMATRICE DI $\tilde{A}$ QUANDO IL RANGO DI A É MASSIMO LO SARÀ ANCHE QUELLO DI $\tilde{A}$.

PER $k \neq +1$ E $k \neq -1$ ABBIAMO

$$r(A) = r(A|b) = 2$$

SISTEMA É CONSISTENTE CON $\infty^{3-2} = \infty^1$

CASO $k = +1$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = +1 +1 = 2 \neq 0 \quad \boxed{2\times 2}$$

$r(\tilde{A}) = 2$ MA $r(A) = 1$ QUINDI IL SISTEMA É INCONSISTENTE.

Caso $k=-1$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$r(\tilde{A}) = 1 = r(A) \Rightarrow$ SISTEMA CONSISTENTE (COMPATIBILE) CON

$$\infty^{3-1} = \infty^{2}$$