SI STABILISCA L'ESISTENZA E LA NUMEROSITÀ DEL SEGUENTE SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} x - 3y + w = 0 \\ 2x - y + z - 4w = 12 \\ 3x - 4y + z - 3w = k \end{cases}$$

AL VARIARE DI $k \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad 3 \times 4 \qquad 1 \leq r(A) \leq 3$$

$$\tilde{A} = (A|b) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 12 \\ 3 & -4 & 1 & -3 & k \end{pmatrix}$$

$$R_2 - 2R_1 \Rightarrow \tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2-2 & -1+6 & 1 & -4-2 & 12 \\ 3 & -4 & 1 & -3 & k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -6 & 12 \\ \boxed{3} & -4 & 1 & -3 & k \end{pmatrix}$$

$$R_3 - 3R_1 \Rightarrow \tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -6 & 12 \\ 3-3 & -4+9 & 1 & \underline{-3-3} & k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -6 & 12 \\ 0 & 5 & 1 & -6 & k \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - R_2 \Rightarrow \tilde{A}^{(3)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & & b \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k-12 \end{array}\right) \end{array}$$

$$r(A) = 2$$

$$r(A|b) = \begin{cases} 3 & k \neq 12 \Rightarrow \text{INCOMPATIBILE} \\ 2 & k = 12 \Rightarrow \text{COMPATIBILE CON } \infty^{4-2} = \infty^2 \end{cases}$$

TROVIAMO LE SOLUZIONI QUANDO IL SISTEMA È COMPATIBILE:

$$\tilde{A}\Big|_{k=12} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -6 & 12 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 0\cdot z + w = 0 \\ 0\cdot x + 5\cdot y + 1\cdot z - 6\cdot w = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + w = 0 \\ 5y + z - 6w = 12 \end{cases}$$

$w = t \quad z = s$

$$\Rightarrow 5y = -z + 6w + 12 =$$

$$= -s + 6t + 12$$

$$\Rightarrow y = -\frac{s}{5} + \frac{6}{5}t + \frac{12}{5} = y(s,t)$$

$$x = 3y - t =$$

$$= -\frac{3}{5}s + 18t + 36 - t = x(s,t)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5}s + 18t + 36 - t \\ -s/5 + (6/5)t + 12/5 \\ s \\ t \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \forall s \in \mathbb{R} \\ \forall t \in \mathbb{R} \end{array}$$

SI STABILISCA SE LA SEGUENTE SERIE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 3^n}{5^n}$$

È CONVERGENTE E, NEL CASO, CALCOLARNE LA SOMMA.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n \right]$$

SE 1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n < +\infty$ $\Big\}$ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\left(-\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n\right] < +\infty$

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n < +\infty$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n < +\infty \iff |q| < 1$$

1) $q = -\frac{1}{5} \Rightarrow |q| = \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{5}} = \frac{5}{6}$

2) $q = \frac{3}{5} \Rightarrow |q| = \frac{3}{5} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{5}{6} + \frac{5}{2} = \frac{5+15}{6}$$

$$= \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

SI STABILISCA PER QUALI VALORI DEL PARAMETRO $\alpha \in \mathbb{R}$ LA SERIE:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{\alpha n}$$

CONVERGE.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{\alpha n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{\alpha})^n$$

$q = e^{\alpha} > 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

PER QUALI α SI HA CHE $e^{\alpha} < 1 \Rightarrow \alpha < 0$

LA SERIE CONVERGE SE E SOLO SE $\alpha < 0$ E IN QUESTO CASO LA SOMMA È

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{\alpha n} = \frac{1}{1-e^{\alpha}}$$

SI DETERMINI PER QUALI α LA SERIE

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+\alpha^2)^n}$$

CONVERGE.

$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0}$ SI HA CHE $\frac{1}{1+\alpha^2} < 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+\alpha^2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{1+\alpha^2}} = \frac{1+\alpha^2}{1+\alpha^2-1} = \frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}$$

SI DETERMINI SE ESISTE

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2\tan(x)}$$

E NEL CASO DETERMINARNE IL VALORE

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2\tan(x)} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - (\cos(x) + x(-\sin(x)))}{2x\tan(x) + x^2\frac{1}{\cos^2(x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\cos(x)} - \cancel{\cos(x)} + x\sin(x)}{2x\tan(x) + \frac{x^2}{\cos^2(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\sin(x)}{2\cancel{x}\tan(x) + \frac{x^{\cancel{2}}}{\cos^2(x)}}$$

$$= \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{2\tan(x) + \frac{\cancel{x}}{\cos^2(x)}} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \qquad x \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{\frac{2}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\cos^2(x)} + x(-2)\cos^{-3}(x)(-\sin(x))} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{\frac{2}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\cos^2(x)} + \frac{2x\sin(x)}{\cos^3(x)}} = \frac{1}{2+1+0} = \frac{1}{3}$$

SIA DATA LA FUNZIONE

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

SI DIMOSTRI CHE:

1) f È CONTINUA IN $x=0$

2) f È DERIVABILE IN $x=0$ MA LA DERIVATA f' È DISCONTINUA IN $x=0$

3) SI DETERMINI IL TIPO DI DISCONTINUITÀ DELLA DERIVATA.

1) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$

$$\left| x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2$$

$$\lim_{x\to 0} \left| x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

2) SE $x \neq 0 \Rightarrow f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x \neq 0$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underline{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = 0$$

$$\left|x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le x$$

$$g(x) = f'(x) = \begin{cases} \underbrace{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$f'(x)$ HA UNA DISCONTINUITÀ ESSENZIALE IN $x = 0$

SI CONSIDERI LA FUNZIONE

$$F(x) = \int_0^{1+x^2} \frac{1+\sqrt{t}}{1+t}\, dt$$

a) PER QUALI VALORI DI X SI APPLICA IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE?

b) SI CALCOLI LA DERIVATA $F'(x)$

c) SI DETERMINI IN CHE REGIONI DI $\mathbb{R}$ LA FUNZIONE $F(x)$ È CRESCENTE/DECRESCENTE.

a) $g(t) = \dfrac{1+\sqrt{t}}{1+t}$ $\qquad D = [0, +\infty)$

$\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\quad 1+x^2 \geq 1$ SIAMO QUINDI IN D E

g È CONTINUA

QUINDI IL TEOREMA FONDAMENTALE SI APPLICA $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^{1+x^2} \frac{1+\sqrt{t}}{1+t}\,dt \rightarrow F(x) = \int_0^{c(x)} \frac{1+\sqrt{t}}{1+t}\,dt \qquad c(x) = 1+x^2$$

$$F'(x) = \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{1+1+x^2} \cdot 2x = \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2+x^2} \cdot 2x$$

≥ 0

$$F(c(x))' = F'(c(x)) \cdot c'(x)$$

$$\int \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \int (1+x)^{-2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{-2+1}(1+x)^{-2+1} + c$$

$$= -\frac{1}{1+x} + c$$

SIA DATA LA FUNZIONE

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$$

1) SI DISCUTA IL SEGNO DI $F(x)$

2) SI STUDI LA CRESCENZA / DECRESCENZA DI $F(x)$

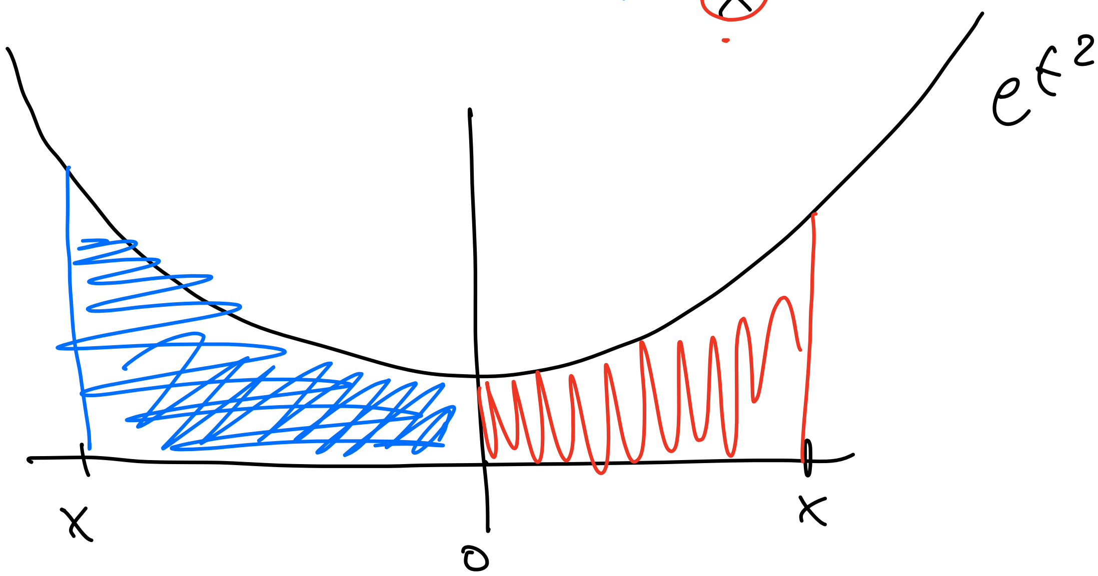
3) SI CALCOLI

$$\int_0^1 \frac{F''(x)}{F'(x)}\,dx$$

1) $F(0) = \int_0^0 \cdots = 0$

Si $x \geq 0 \Rightarrow \int_0 e^{t^2} dt \geq 0$

Si $x < 0 \Rightarrow \int_0^x e^{t^2} dt = - \int_x^0 e^{t^2} dt \Rightarrow \leq 0$



$$\int_{-3}^{0} e^{t^2} dt \geq 0 \qquad - \int_{-3}^{0} e^{t^2} dt \leq 0$$

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \Rightarrow F'(x) = e^{x^2}$$

$$F''(x) = 2x e^{x^2}$$

$$\int_0^1 \frac{F''(x)}{F'(x)} dx = \int_0^1 \frac{2x \cancel{e^{x^2}}}{\cancel{e^{x^2}}} dx = \int_0 2x dx =$$

$$= 2\int_0^1 x\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 1$$

$f(x) = x^2 e^{-x}$

1) DOMINIO $\quad D = \mathbb{R}$

2) ASINTOTI: $\quad$ VERTICALI $\emptyset$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{+\infty}{0} = +\infty$$

$$\parallel$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^x = +\infty$$

$y=0$ É ASINTOTO ORIZZONTALE

3) INTERSEZIONE CON ASSI

$f(0) = 0 \qquad x^2 e^{-x} = 0 \iff x = 0$

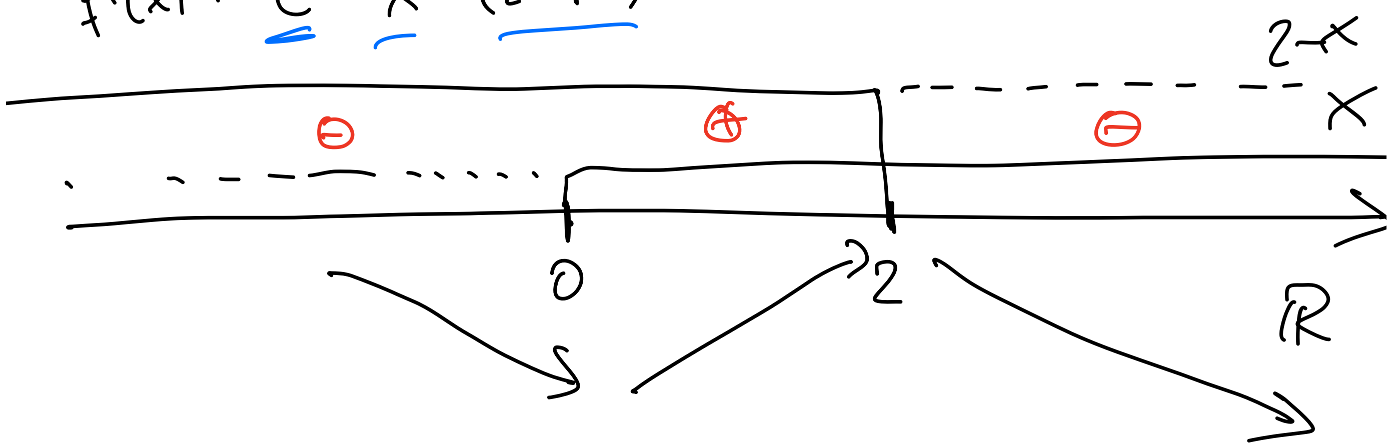
4) SEGNO DELLA FUNZIONE

$$x^2 e^{-x} \geq 0 \quad \forall \, x \in \mathbb{R}$$

5) $f'(x) = \left(x^2 e^{-x}\right)' = 2x e^{-x} + x^2 \left(e^{-x}\right)' =$

$$= 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = x e^{-x}(2-x)$$

$$f'(x) = e^{-x} \, x \cdot (2-x)$$



$x = 0 \Rightarrow$ MINIMO LOCALE

$x = 2 \Rightarrow$ MASSIMO LOCALE

6) $f''(x) = \left(e^{-x}\left(2x - x^2\right)\right)' =$

$$= -e^{-x}\left(2x - x^2\right) + e^{-x}(2 - 2x) =$$

$$= e^{-x}\left[x^2 - 2x + 2 - 2x\right] =$$

$$= e^{-x}\left[x^2-4x+2\right] = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{2}$$