Università degli Studi di Roma Tor Vergata

Esercitazione in Matematica Generale - Prof. Vincenzo Morinelli

Corso di Laurea in Economia e Management

Esercitatore:

Dott. Alessio Ranallo *ranallo@mat.uniroma2.it*

6 dicembre 2022

Rango, determinante, sistemi lineari

1. Determinare il rango della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Calcolare il rango della seguente famiglia di matrici al variare di $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \\ 1+k & -1+k \end{pmatrix}$$

3. Utilizzare il teorema di Rouché-Capelli per analizzare i seguenti sistemi e solo successivamente determinarne le soluzioni dove possibile

   (a)
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y + 4z = 2 \\ 3x - 3y + z = 1 \end{cases}$$

   (b)
$$\begin{cases} y - z = -1 \\ x + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

   (c)
$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 3x - 3z = 1 \end{cases}$$

4. Stabilire se i sistemi lineari corrispondenti alle seguenti matrici e vettori dei termini noti sono risolubili

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & k & 1 \\ 2k & -k & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2t & 2t \\ 2t & 2t \\ 2t & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 2k \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & k & k \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 4k \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1+k \\ 1 & 1 & 2k+2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

5. (Esercizio guidato) Risolvere e analizzare il seguente sistema

$$\begin{cases} ax + by + bz = c \\ bx + ay + bz = c \\ bx + bz + az = c \end{cases},$$

dove le incognite sono x, y, z e a, b, c sono parametri in $\mathbb{R}$, $c \neq 0$.

(a) Scrivere la matrice dei coefficienti e calcolarne il determinante [risp. $(a+2b)(a-b)^2$];

(b) Calcolare quando il determinante è uguale a zero [risp. $a = -2b \vee a = b$];

(c) Nei casi in cui il determinante è diverso da zero il sistema ammette soluzioni? Se sì, quante e come possono essere determinate? [risp. applicando Cramer, verificare che $x = y = z = \frac{c}{a+2b}$ in questi casi];

(d) Nelle condizioni in cui il determinante è uguale a zero, il sistema ammette soluzioni? [risp. Nel caso $a = b$ il sistema ha infinite soluzioni dipendenti da 2 parametri, nel caso $a = -2b$ il sistema è impossibile].