Università degli Studi di Roma Tor Vergata

Esercitazione in Matematica Generale - Prof. Vincenzo Morinelli

Corso di Laurea in Economia e Management

Esercitatore:

Dott. Alessio Ranallo *ranallo@mat.uniroma2.it*

24 novembre 2022

Funzioni in più variabili e Algebra Lineare 1

1. Trovare i punti critici delle funzioni
   (a) $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)xy$
   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y^2$
   (c) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$
   (d) $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)xy$
   (e) $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

   e se possibile classificarli.

2. Trovare i punti in cui la funzione
$$f(x,y) = e^{x^2-y^2}$$
   assume il massimo assoluto e il minimo assoluto relativamente all'insieme
$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$
   Fare lo stesso per:
   (a) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 8(x^2 + y^2)$ in $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 \leq 9\right\}$
   (b) $f(x,y) = x^2y + xy^2 - xy$ in $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \geq 0,\, y \geq 0,\, x + y \leq 1\right\}$

3. Dopo aver determinato se le dimensioni sono compatibili, calcolare il seguente prodotto
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

4. Data la matrice
$$U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

dimostrare che

$$U^T U = I_2,$$

dove $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice identità.

5. <u>Bonus</u> Preso qualunque $x \in \mathbb{R}$, data la matrice

$$U = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix},$$

dimostrare che

$$U^T U = I_2,$$

dove $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice identità.

6. Dire se i seguenti insiemi di vettori sono linearmente indipendenti

   (a) $\{(1, 2), (-3, e)\}$;

   (b) $\{(1, 4), (-2, 1)\}$

   (c) $\{(1, 1, 2), (-2, 0, 2), (-1, 1, 0)\}$

   (d) $\{(1, 1, 3), (2, 2, 0), (3, 3, -3)\}$.