ESERCITAZIONE di
MATEMATICA GENERALE - CLEF
Prof.ssa Tessitore

Tutor: Dott. Dario Antolini e Dott. Gianluca Marzo

27/09/2018, A.A. 2018/2019

Funzioni tra Insiemi Numerici: Iniettività e Suriettività

Es. 1. Nei seguenti esercizi stabilire quali delle seguenti funzioni sia o meno **Iniettiva**, **Suriettiva** o entrambe (e quindi **Biiettiva/Biunivoca**):

(1) Sia f la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ tale che $f(n) = \sum_{i \in \mathbb{N}, 1 \leq n} \frac{1}{i}$.

(2) Sia f la funzione $f : \mathbb{Z}\ \{0, -1\} \to \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ tale che $f(n) = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$.

(3) Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tale che $f(x) = 7x + 5$.

(4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 7x + 5$.

(5) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(n) = 4x^2 - 9$.

(6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x^3 + x$.

Es. 2. Si consideri l'insieme dei numeri naturali pari $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ e quello dei numeri naturali dispari $\mathbb{D} \subset \mathbb{N}$. Si stabilisca l'**iniettività** e la **suriettività** delle seguenti funzioni.

(1) Sia $f : \mathbb{P} \to \mathbb{D}$ la funzione che associa a ciascun numero naturale pari p il numero dispari successivo.
(a) Si scriva la legge di f (cioè $f(p) = \dots$).
(b) Si dica se f così definita è Iniettiva o Suriettiva.

(2) Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione così definita:
.
$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \in \mathbb{P} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{se } n \in \mathbb{D} \end{cases}$$

(3) Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione così definita:
.
$$f(n) = \begin{cases} n + 1 & \text{se } n \in \mathbb{P} \\ n - 1 & \text{se } n \in \mathbb{D} \end{cases}$$

(4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione così definita:
.
$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Topologia della Retta Reale $\mathbb{R}$

Es. 3. Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ si dica se sono **Aperti**, **Chiusi** o né **Aperti** né **Chiusi**. Inoltre si calcoli l'**Interno**, la **Frontiera**, i **Punti di Accumulazione** :

(1) $(-\infty, +\infty)$

(2) $\emptyset$

(3) $(0, 1)$

(4) $[-1, 1]$

(5) $(0, 3]$

(6) $(-\infty, -5]$

(7) $\{1\}$

(8) $\{\pi\}^{\mathbb{C}}$

(9) $\{3\} \cup [0, 1]$

(10) $[-10, 10]$

(11) $(6, 7)$

(12) $[1, 2) \cup [2, 3]$

(13) $(1, 2) \cup [-1, 0]$

(14) $(-\infty, 0]^{\mathbb{C}}$

(15) $[0, 2] \cup (2, 6)$

(16) $[0, 3] \cap [3, 4]$

(17) $[-1, \sqrt{3}] \cap [0, \frac{3}{2}]$

(18) $[0, 13] \setminus \mathbb{N}$

(19) $[-3, 3] \cap \mathbb{Q}$

(20) $(-\infty, -1) \cup \{0\} \cup [\frac{1}{10}, 1]$

(21) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

Ricerca di Estremi di un Insieme

Es. 4. Dire se i seguenti insiemi sono limitati **inferiormente** o **superiormente** e, in caso affermativo, trovare l'**estremo inferiore** o l'**estremo superiore**.
Dire se si tratta di **minimi** o **massimi**.

(1) $[-3, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$

(2) $(-1, 0) \subseteq \mathbb{R}$

(3) $[-\sqrt{2}, 3] \subseteq \mathbb{R}$

(4) $[-\sqrt{3}, \frac{7}{2}] \cap \mathbb{Q}$

(5) $[-2, 1] \cap \mathbb{N}$

(6) $\mathbf{A} = \{\frac{1}{n+2} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$

(7) $\mathbf{A}' = \mathbf{A} \cup [0, 1]$

(8) $\mathbf{A}'' = \{\frac{n-1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$

(9) $\mathbf{B} = \{\frac{2n}{n^2+1} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$

(10) $\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{R} \,\big|\, x^2 \leq 2\}$

(11) $\mathbf{C}' = \mathbf{C} \cap \mathbb{Q}$

(12) $\mathbf{D} = \{n - \frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$

(13) $\mathbf{E} = \{n^2 + 3n - 1 \,:\, n \in \mathbb{N}\}$

(14) $\mathbf{F} = \{2^x \,:\, x \in \mathbb{R}\}$

(15) $\mathbf{F}' = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}$

Rette nel piano

1) Trovare la retta passante per i due punti del piano p_1 e p_2 nei seguenti casi :

- $p_1 = (6, 2), p_2 = (0, 7)$;
- $p_1 = (-2, 5), p_2 = (-4, 9)$;
- $p_1 = (4, 6), p_2 = (-3, 2)$;
- $p_1 = (3, 0), p_2 = (9, -1)$;

2) Trovare la retta passante per il punto p e di direzione vettore v nei seguenti casi :

- $p = (5, 1), v = (4, -2)$;
- $p = (3, 5), v = (1, -3)$;
- $p = (1, 0), v = (4, 5)$;
- $p = (5, -7), v = (9, -3)$;

2)Dire se le rette r_1 e r_2 sono parallele o perpendicolari :

- $r_1 \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$, $r_2 \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$
- $r_1 \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$, $r_2 \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 7x + 7y = 5\}$
- $r_1 \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 1\}$, $r_2 \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 6y = 0\}$
- $r_1 \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 5y = -7\}$, $r_2 \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 25x + 9y = 4\}$

3) Data la retta del piano r ed il punto p, esterno ad essa, trovare la retta parellela, e poi quella perpendicolare, a r passante per p nei seguenti casi:

- $r \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$, $p \doteq (1, 2)$;
- $r \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 0\}$, $p \doteq (3, 1)$;
- $r \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 4\}$, $p \doteq (1, 1)$;
- $r \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2\}$, $p \doteq (1, 2)$;
- $r \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$, $p \doteq (1, \frac{1}{2})$;
- $r \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{5} - \frac{y}{4} = 0\}$, $p \doteq (4, 2)$;

4) Date le rette del piano r_1 e r_2 rispettivamente di coefficenti angolari m_1 e m_2, trovare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che siano parallele nei seguenti casi:

- $m_1 = 2$, $m_2 = \alpha$;
- $m_1 = 2$, $m_2 = \frac{\alpha}{4}$;
- $m_1 = -2\alpha$, $m_2 = 0$;
- $m_1 = 2\alpha - 5$, $m_2 = \alpha + 4$;
- $m_1 = \alpha - 1$, $m_2 = \alpha + 9$;
- $m_1 = 3(\alpha - 4)$, $m_2 = 2\alpha + 7$;
- $m_1 = \frac{\alpha-1}{2}$, $m_2 = \frac{\alpha}{3}$;
- $m_1 = \frac{1}{\alpha}$, $m_2 = -\frac{4}{3}$;

5) Date le rette del piano r_1 e r_2 rispettivamente di coefficenti angolari m_1 e m_2, trovare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che siano perpendicolari.

- $m_1 = 3$, $m_2 = \alpha$;
- $m_1 = -1$, $m_2 = -\frac{\alpha}{5}$;
- $m_1 = \alpha$, $m_2 = -\alpha$;
- $m_1 = \frac{1}{\alpha-1}$, $m_2 = \frac{\alpha-1}{2}$;
- $m_1 = 0$, $m_2 = \frac{\alpha+3}{\alpha-4}$;
- $m_1 = 3\alpha + 7$, $m_2 = -\frac{1}{2\alpha}$;