Università degli Studi di Roma Tor Vergata.

Corso di

Microeconomia

(Corsi di Laurea Triennali CLEMIF e CLEOT)

Prof. Alessandro Piergallini

Assistente: Dott. Andrea Pisante

(andrea.pisante2014@libero.it , ricevimento ogni lunedì dopo l'esercitazione)

Anno Accademico 2015-16

Esercitazione 5 – 30 marzo 2016 – Testo e Soluzioni

1. **In un modello di scelta tra due beni, a e b, le preferenze di un consumatore sono così caratterizzate: $UMa_a = 2\ Q_b$; $UMa_b = Q_a$. Le sue dotazioni dei due beni sono: $E_a = 6$; $E_b = 9$. I prezzi sono rispettivamente: $P_a = 12$; $P_b = 8$.**

   A. Calcolare le quantità acquistate e vendute dei due beni.

   B. Rappresentare graficamente, sul piano Q_a, Q_b, il vincolo di bilancio e la curva di indifferenza corrispondente alla scelta ottima del consumatore.

Risposte

(riferimento nel testo, paragrafo 5.1 Dotazioni iniziali e scelta del consumatore)

A. La prima condizione che la scelta razionale del consumatore deve rispettare è che la quantità consumata dei due beni sia tale che il saggio marginale di sostituzione tra i due beni (che è una funzione delle loro quantità scelte) sia uguale al loro prezzo relativo (che è un dato esogeno). Formalmente abbiamo quindi:

$$SMaS_{b,a} = {}^{P_a}/_{P_b}.$$

Sostituendo al SMaS la sua espressione in termini di utilità marginali e i vari dati dell'esercizio otteniamo quindi:

$$SMaS = \frac{UMa_a}{UMa_b} = \frac{\mathbf{2Q_b}}{\mathbf{Q_a}} = \frac{P_a}{P_b} = \frac{12}{8} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},$$

$$2Q_b = {}^{3}/_{2}\, Q_a\,,$$

$$Q_b = {}^{3}/_{4}\, Q_a\,.$$

Che è appunto la relazione (lineare) tra le endogene che rispetta la condizione.

La seconda condizione che la scelta razionale del consumatore deve soddisfare è il rispetto del vincolo di bilancio, cioè che la spesa (che è una funzione delle quantità scelte) sia uguale alle risorse (che sono un dato esogeno). Formalmente:

$$E_a \times P_a + E_b \times P_b = R = Q_a \times P_a + Q_b \times P_b.$$

Sostituendo a prezzi e dotazioni i dati del nostro esercizio otteniamo:

$$6 \times 12 + 9 \times 8 = 72 + 72 = 144 = Q_a \times 12 + Q_b \times 8.$$

Dividendo per 4 i due ultimi termini sulla destra e poi esplicitando l'equazione per Q_b otteniamo quindi:

$$36 = 3\,Q_a + 2\,Q_b.$$

$$\mathbf{Q_b} = {}^{36}/_{2} - {}^{3}/_{2}\,Q_a = \mathbf{18} - {}^{\mathbf{3}}/_{\mathbf{2}}\,\mathbf{Q_a}\,.$$

Che è appunto la relazione (lineare) tra le endogene che rispetta la condizione di appartenenza al nostro vincolo di bilancio.

Il paniere desiderato sarà composto dalla combinazione di Q_a e Q_b che soddisferà entrambe le condizioni, cioè che risolverà il sistema di due equazioni lineari (alternativamente avremmo potuto sostituire la prima espressione di Q_b nel vincolo di bilancio per risolverlo nell'unica incognita Q_a, trovando così Q_a*):

$$\begin{cases} Q_b = {}^{3}/_{4}\,Q_a \\ Q_b = 18 - {}^{3}/_{2}\,Q_a \end{cases}$$

che per la sua semplice struttura possiamo risolvere eguagliando i due termini sulla destra e ottenendo dopo vari semplici passaggi il valore scelto del bene a, Q_a*:

$${}^{3}/_{4}\,Q_a = 18 - {}^{3}/_{2}\,Q_a\,.$$

$$18 = {}^{3}/_{4}\,Q_a + {}^{3}/_{2}\,Q_a = Q_a\left({}^{3}/_{4} + {}^{6}/_{4}\right) = {}^{9}/_{4}\,Q_a = 18\,.$$

$$\boldsymbol{Q_a^*} = 18\,{}^{4}/_{9} = \mathbf{8}\,.$$

Sostituendo Q_a* in una delle due precedenti espressioni otteniamo il valore desiderato del secondo bene Q_b*. Operando sulla prima equazione otteniamo:

$$\mathbf{Q_b^*} = {}^{3}/_{4}\,Q_a^* = {}^{3}/_{4}\,8 = \mathbf{6}\,.$$

Questi due valori, Q_a* e Q_b*, sono le **quantità desiderate** per il consumo dei due beni, per trovare **le quantità acquistate e vendute dei due beni**, dobbiamo sottrarvi le rispettive dotazioni. Individuiamo così le Domande Nette di ciascun bene (cfr p86 del testo) per cui un valore positivo indica una quantità acquistata ed uno negativo una quantità venduta. Otteniamo quindi:

$Q_a^* - E_a = 8 - 6 = 2 > 0$ è la quantità acquistata del bene a;

$Q_b^* - E_b = 6 - 9 = -3 < 0$ è la quantità venduta del bene b.

B. Abbiamo precedentemente ricavato l'espressione del vincolo di bilancio esplicitato per Q_b, e cioè: $Q_b = 18 - 3 / 2\ Q_a$. Esso ha pendenza pari a $-3 / 2$. Ne calcoliamo quindi le intercette: $Q_a = 0 \rightarrow$ $\mathbf{Q_b = 18}$; $Q_b = 0 \rightarrow 0 = 18 - 3 / 2\ Q_a$. Da cui ricaviamo: $18 = 3 / 2\ Q_a$. Quindi: $\mathbf{Q_a} = 18\ (2/3) = \mathbf{12}$. Possiamo quindi tracciare il vincolo di bilancio nel seguente grafico.

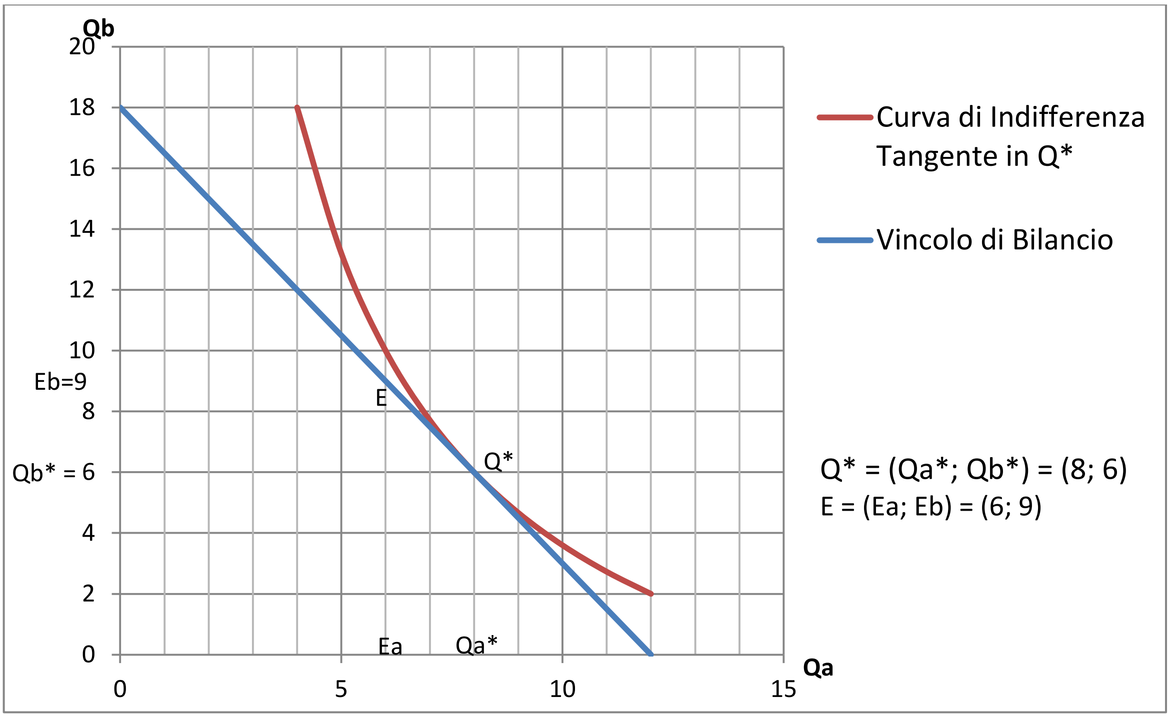
Sullo stesso grafico tracciamo inoltre:

1) il punto delle dotazioni iniziali E = (Ea; Eb) = (6; 9);
2) il punto del paniere consumato $Q^* = (Q_a^*; Q_b^*) = (8; 6)$.

Verificando che gli stessi giacciano sulla retta di bilancio (*altrimenti c'è un errore!*).

Infine tracciamo una rappresentativa curva di indifferenza (quindi decrescente e convessa) tangente al vincolo di bilancio nel punto Q*.

Dal grafico sono anche evidenti: la quantità acquistata del bene a sull'asse delle ascisse, $Q_a^* - E_a = 2$; e la quantità venduta del bene b sull'asse delle ordinate, $E_b - Q_b^* = 3$.



2. **In un modello di scelta tra lavoro e tempo libero, le preferenze di un consumatore sono così caratterizzate: $UMa_Q = 1/2\ T_l$; $UMa_{Tl} = Q$. La sua dotazione di tempo libero è $E_l = 16$; il suo reddito non da lavoro è $R = 20$. Il prezzo di una unità di consumo è $P = 1$; il salario nominale è $W = 4$.**

   A. **Calcolare la quantità offerta di lavoro e il livello del consumo.**

   B. **Come varia la risposta se il reddito non da lavoro si riduce a $R' = 8$?**

   C. **Rappresentare graficamente, sul piano T_l, Q, il vincolo di bilancio e la curva di indifferenza corrispondente alla scelta ottima del consumatore, <u>per ciascun livello del reddito non da lavoro.</u>**

Risposte

(riferimento nel testo, paragrafo 5.2 La scelta tra lavoro e tempo libero)

A. La prima condizione che la scelta razionale del consumatore deve rispettare è che la quantità consumata dei due beni (nel nostro caso il tempo libero, T_l, e il consumo, Q) sia tale che il saggio marginale di sostituzione tra i due beni (che è una funzione delle loro quantità scelte) sia uguale al loro prezzo relativo, nel nostro caso il salario reale (che è un dato esogeno). Formalmente abbiamo quindi:

$$SMaS_{Q,Tl} = {}^{W}/_{P} \quad .$$

Sostituendo al SMaS la sua espressione in termini di utilità marginali e i vari dati dell'esercizio otteniamo quindi:

$$SMaS \quad = \frac{UMa_{Tl}}{UMa_Q} = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{1/_2 T_l}} = \frac{W}{P} = \frac{4}{1} = \mathbf{4},$$

$$\mathbf{Q} \quad = 4\,{}^1/_2\,\mathrm{T}_l = \mathbf{2\ T}_{\boldsymbol{l}},$$

Che è appunto la relazione (lineare) tra le endogene, Q e T_l, che rispetta la prima condizione di ottimo.

La seconda condizione che la scelta razionale del consumatore deve soddisfare è il rispetto del vincolo di bilancio, cioè che la spesa sia uguale alle risorse, considerando che le stesse sono funzione anche della scelta endogena di quanto lavorare. Formalmente, possiamo scrivere il vincolo di bilancio come:

$$P \times Q = R + W \times N = R + W(E_l - T_l).$$

Sostituendo a prezzi e dotazioni i dati del nostro esercizio otteniamo:

$$1 \times Q = 20 + 4(16 - T_l) = 20 + 64 - 4T_l = 84 - 4T_l.$$

Cioè: $Q = 84 - 4T_l$.

Che è appunto la relazione (lineare) tra le endogene che rispetta la condizione di appartenenza al nostro vincolo di bilancio.

Il paniere desiderato sarà composto dalla combinazione di Q e T_l che soddisferà entrambe le condizioni, cioè che risolverà il sistema di due equazioni lineari (alternativamente avremmo potuto sostituire T_l = ½ Q dalla prima espressione nel vincolo di bilancio per risolverlo nell'unica incognita Q , trovando così Q*):

$$\begin{cases} \mathrm{Q} = 2\mathrm{T}_l \\ \mathrm{Q} = 84 - 4\mathrm{T}_l \end{cases}$$

che per la sua semplice struttura possiamo risolvere eguagliando i due termini sulla destra e ottenendo dopo vari semplici passaggi il valore scelto del bene tempo libero, T_l*:

$$2\mathrm{T}_l = 84 - 4\mathrm{T}_l, \;\rightarrow\; \mathrm{T}_l = 42 - 2\mathrm{T}_l, \;\rightarrow\; 3\mathrm{T}_l = 42,$$

$$\boldsymbol{T_l^*} = {}^{42}/_3 = \mathbf{14}.$$

Sostituendo T_l* in una delle due precedenti espressioni di Q otteniamo il valore desiderato del consumo Q*. Operando sulla prima equazione otteniamo:

Q* = 2 T_l* = 2 * 14 **= 28**.

Per calcolare la corrispondente offerta di lavoro dobbiamo semplicemente sostituire nella relativa formula:

N* = E_l – T_l* = 16 – 14 **= 2**.

B. Se il reddito non da lavoro si riduce a R' = 8, abbiamo che la prima condizione di ottimo, SMaS = W/P, non cambia. Quello che cambia è il vincolo di bilancio, in cui avremo un minore valore del reddito non da lavoro. Infatti il nuovo vincolo di bilancio sarà:

$$P \times Q = R' + W \times N = R' + W(E_l - T_l).$$

Sostituendo a prezzi e dotazioni i dati del nostro esercizio compreso R', otteniamo:

$$1 \times Q = 8 + 4(16 - T_l) = 8 + 64 - 4T_l = 72 - 4T_l.$$

Cioè: $Q = 72 - 4T_l$.

Che è appunto la relazione (lineare) tra le endogene che rispetta la condizione di appartenenza al nostro *nuovo* vincolo di bilancio. Notiamo rispetto al precedente vincolo che logicamente a pari tempo libero goduto il consumo possibile è diminuito di $\Delta R = R - R' = 20 - 8 = 12$.

Il nuovo paniere desiderato sarà composto dalla combinazione di Q e T_l che soddisferà il sistema di equazioni lineari che incorpora il nuovo vincolo di bilancio, cioè:

$$\begin{cases} Q = 2T_l \\ Q = 72 - 4T_l \end{cases}.$$

Da cui otteniamo dopo vari semplici passaggi il nuovo valore scelto del bene tempo libero, $T_l^{*\prime}$:

$$2T_l = 72 - 4T_l, \rightarrow T_l = 36 - 2T_l, \rightarrow 3T_l = 36,$$

$$\boldsymbol{T_l^{*\prime}} = {}^{36}/_{3} = \mathbf{12}.$$

Sostituendo $T_l^{*\prime}$ nella prima delle due precedenti espressioni di Q otteniamo il valore desiderato del consumo $Q^{*\prime}$:

Q*’ = 2 $T_l^{*\prime}$ = 2 * 12 **= 24**.

Per calcolare la corrispondente nuova offerta di lavoro dobbiamo semplicemente sostituire nella relativa formula:

N*’ = $E_l - T_l^{*\prime} = 16 - 12$ **= 4**.

Notiamo quindi che la diminuzione di R implica: una diminuzione del consumo scelto; una diminuzione del tempo libero scelto; un aumento dell’offerta di lavoro.

C. Abbiamo precedentemente ricavato l’espressione del *primo* vincolo di bilancio esplicitato per Q, e cioè: $Q = 84 - 3\,T_l$. Esso ha pendenza pari a -3 sul piano T_l, Q. Ne calcoliamo quindi l’intercetta con l’asse delle ordinate: $T_l = 0 \rightarrow$ **Q = 84**. Non ne calcoliamo invece l’intercetta con l’asse delle ascisse, in quanto per ogni $R > 0$, implicherebbe un valore di $T_l > E_l$ quindi non significativo.

Calcoliamo invece il punto corrispondente alle dotazioni iniziali, chiamandolo E:

$E = (E_l; R/P) = (16; 20/1) = (16; 20)$.

Possiamo quindi tracciare il vincolo di bilancio nel seguente grafico, che sarà il segmento che congiunge il punto delle dotazioni con l’intercetta con l’asse delle ordinate.

Sullo stesso grafico tracciamo inoltre il punto del paniere consumato, C*:

$C^* = (T_l^*; Q^*) = (14; 28)$.

Verificando che lo stesso giaccia sulla retta di bilancio (*altrimenti c’è un errore!*).

Infine tracciamo una rappresentativa curva di indifferenza (quindi decrescente e convessa) tangente al vincolo di bilancio nel punto C*.

Dal grafico è anche evidente la quantità offerta di lavoro sull’asse delle ascisse: $N^* = E_l - T_l^* = 16 - 14 = 2$.

Per quanto riguarda il caso con il minore reddito non da lavoro, R’ = 8, abbiamo precedentemente ricavato l’espressione del *nuovo* vincolo di bilancio esplicitato per Q, e cioè: $Q = 72 - 3\,T_l$. Esso ha ancora pendenza pari a -3 sul piano T_l, Q, quindi è parallelo al precedente (il salario reale è infatti lo stesso). Ne

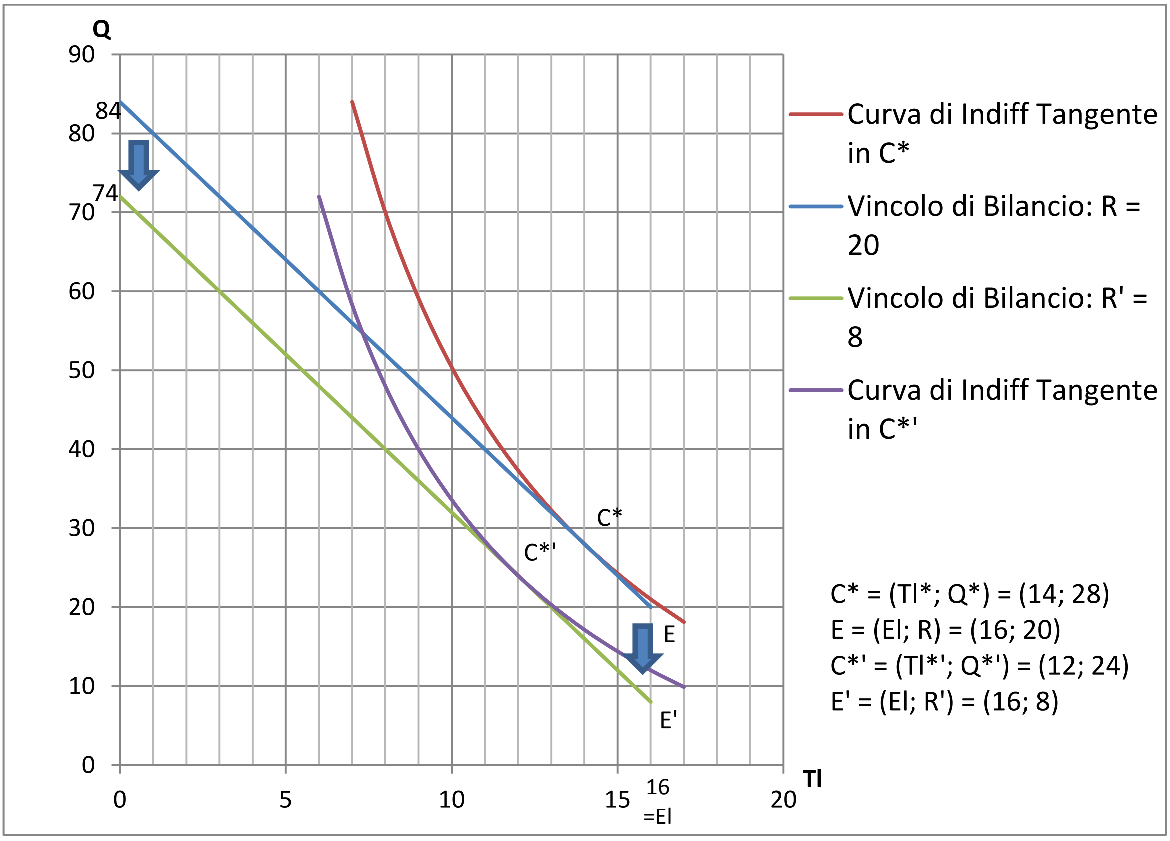
calcoliamo quindi l'intercetta con l'asse delle ordinate: $T_l = 0 \rightarrow$ **Q = 72**. Non in quanto per ogni R > 0, implicherebbe un valore di $T_l > E_l$ quindi non significativo.
Essendo anche R' > 0, non ne calcoliamo l'intercetta con l'asse delle ascisse, ma calcoliamo invece il nuovo punto corrispondente alle nuove dotazioni iniziali, chiamandolo E':

$$E' = (E_l; R'/P) = (16; 8/1) = (16; 8).$$

Possiamo quindi tracciare il nuovo vincolo di bilancio nel seguente grafico, che sarà il segmento che congiunge il punto delle nuove dotazioni con la nuova intercetta con l'asse delle ordinate. Entrambi i punti sono di $\Delta R = R - R' = 20 - 8 = 12$ unità di consumo al di sotto dei precedenti, per cui il nuovo vincolo di bilancio non è altro che il precedente traslato parallelamente verso il basso di 12 Q.
Sullo stesso grafico tracciamo inoltre il punto del nuovo paniere consumato, C*':

$$C^{*\prime} = (T_l^{*\prime}; Q^{*\prime}) = (12; 24).$$

Verificando che lo stesso giaccia sulla nuova corrispondente retta di bilancio (*altrimenti c'è un errore!*).
Infine tracciamo una nuova rappresentativa curva di indifferenza (quindi decrescente e convessa) tangente al nuovo vincolo di bilancio nel punto C*'.
Dal grafico è anche evidente la nuova quantità offerta di lavoro sull'asse delle ascisse: $N^{*\prime} = E_l - T_l^{*\prime} = 16 - 12 = 4$.
Il grafico dei due casi è il seguente.



3. **In un modello di scelta tra consumo e risparmio (consumo presente e consumo futuro), le preferenze di un consumatore sono così caratterizzate: $UMa_{Q0} = 1 / Q_0$; $UMa_{Q1} = \beta / Q_1$, dove $0 < \beta \leq 1$, rappresenta il fattore di sconto dell'utilità futura rispetto a quella presente. Le sue dotazioni nei due periodi (presente e futuro) sono: $E_0 = 100$; $E_1 = 121$. Il livello dei prezzi è costante e lo possiamo quindi normalizzare ad uno: $P_0 = P_1 = 1$. Il tasso d'interesse (nominale e reale) è del 10%.**

   A. **Scrivere *l'equazione generale del* vincolo di bilancio intertemporale del consumatore.**

   B. **Calcolare il valore attuale scontato della sua ricchezza (cioè delle sue dotazioni).**

   C. **Rappresentare graficamente, sul piano Q_0, Q_1, il vincolo di bilancio intertemporale del consumatore.**

   D. **Calcolare la scelta ottimale del profilo di consumo intertemporale quando si da eguale peso al consumo presente e futuro, $\beta = 1$.**

   E. **Calcolare la scelta ottimale del profilo di consumo intertemporale quando $\beta = 10 / 11 = 0,(90)$, e quindi si da meno peso al consumo futuro rispetto a quello presente.**

   F. **Calcolare la scelta ottimale del profilo di consumo intertemporale quando $\beta = 0,80$, quindi si da ancor meno peso al consumo futuro rispetto a quello presente.**

   G. **Calcolare il livello del risparmio nel periodo corrente nei 3 precedenti scenari.**

   H. **Rappresentare graficamente, sul piano Q_0, Q_1, le curve di indifferenza corrispondenti alle scelte ottime dei tre diversi consumatori corrispondenti ai tre precedenti scenari.**

Risposte

(riferimento nel testo, paragrafo 5.3 La scelta tra consumo e risparmio)

<u>NOTA per i (più) preparati matematicamente (non necessaria per l'esame, ma utile per una più approfondita comprensione dell'esercizio stesso):</u> le due equazioni che esprimono le utilità marginali dei due beni [$UMa_{Q0} = 1 / Q_0$; $UMa_{Q1} = \beta / Q_1$], che vengono fornite direttamente nel testo dell'esercizio, possono essere ricavate da una funzione di utilità del tipo (funzione di due variabili studiata in matematica generale):

$$U = \log(Q_0) + \beta \log(Q_1). \quad \leftrightarrow \quad z = F(x, y) = \log(x) + \beta \log(y).$$

Infatti essendo l'utilità marginale nient'altro che la derivata parziale della funzione di utilità rispetto allo specifico bene per cui la si calcola, conseguentemente per ricavare l'utilità marginale basta applicare le regole di derivazione della precedente funzione di utilità. Richiamo qui brevemente la regola di derivazione "generale".

Data una funzione $y = f(x) = a \log(x)$, abbiamo: $y' = dy/dx = f'(x) = a / x$.

Quindi, data una funzione di utilità: $U = \log(Q_0) + \beta \log(Q_1)$, abbiamo che:

$UMa_0 = \partial U/\partial Q_0 = 1 / Q_0$,

$UMa_1 = \partial U/\partial Q_1 = \beta / Q_1$.

Comunque tutti gli esercizi saranno risolti senza fare ricorso al calcolo differenziale.

A. Il vincolo di bilancio intertemporale (o vincolo della ricchezza) del consumatore esprime la necessità che la somma del(la spesa per il) consumo corrente e del valore attuale del(la spesa per il) consumo futuro eguagli la somma del reddito corrente e del valore attuale del reddito futuro. Quindi che il valore attuale del flusso temporale di spesa eguagli il valore attuale del flusso temporale dei redditi, cioè la sua ricchezza (in termini del consumo corrente). Una sua espressione generale è (testo pagina 92):

$$P_0 * Q_0 + P_1 * Q_1 / (1 + i) = P_0 * E_0 + P_1 * E_1 / (1 + i).$$

Nel nostro caso in cui i prezzi non variano e sono normalizzati ad uno, diviene (testo pagina 93):

$$Q_0 + Q_1 / (1 + i) = E_0 + E_1 / (1 + i).$$

B. Sostituendo i valori delle dotazioni del nostro esercizio, otteniamo quindi:

$$E_0 + E_1 / (1 + i) = 100 + 121 / (1 + 0{,}1)$$

$$E_0 + E_1 / (1 + i).= 100 + 121 / 1{,}1 = 100 + 110 = 210.$$

Quindi il valore attuale scontato delle sue dotazioni (la sua ricchezza) risulta pari a 210.

Possiamo quindi scrivere il vincolo della ricchezza del nostro consumatore come:

$$\mathbf{Q_0 + Q_1 / 1{,}1 =} E_0 + E_1 / (1 + i) \mathbf{= 210}.$$

C. Per rappresentare graficamente, sul piano Q_0, Q_1, il vincolo di bilancio intertemporale del nostro consumatore, $Q_0 + Q_1 / (1{,}1) = 210$, dobbiamo esplicitarlo per Q_1, ottenendo con semplici passaggi:

$$Q_0 + Q_1 / (1{,}1) = 210$$

$$1{,}1 * Q_0 + Q_1 = 210 * 1{,}1 = 231$$

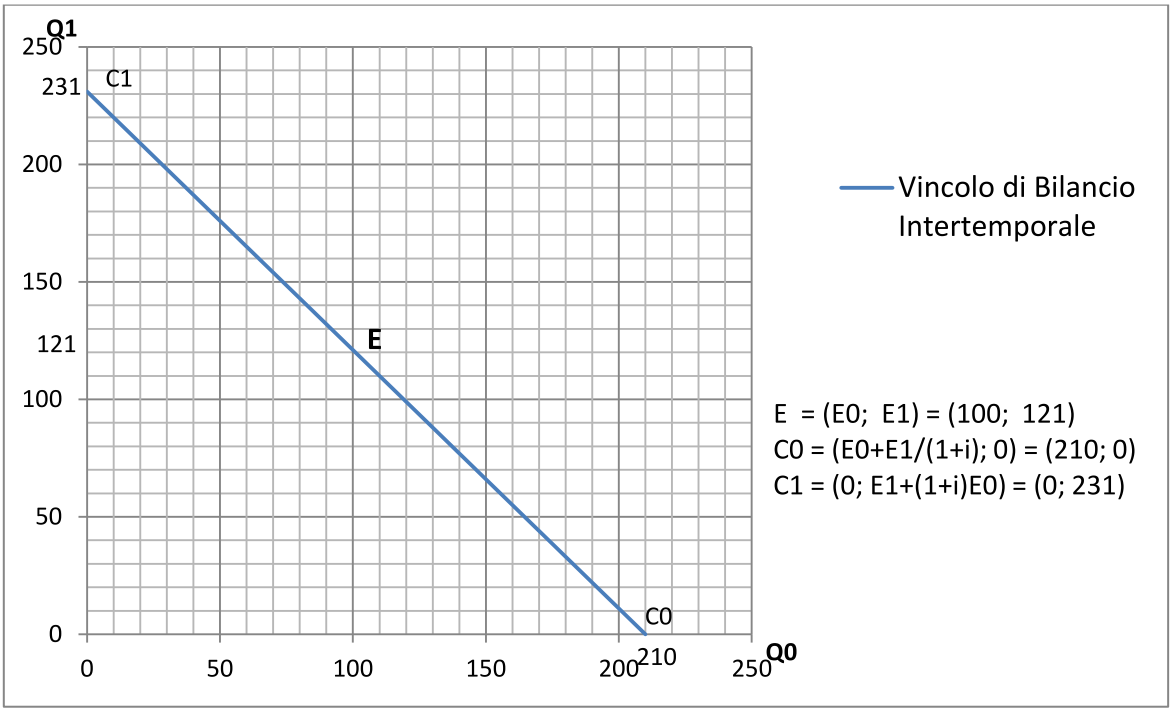
$$\mathbf{Q_1 = 231 - 1{,}1\, Q_0}$$

Che è appunto l'equazione del vincolo di bilancio intertemporale del nostro consumatore esplicitato per il consumo futuro. Lo possiamo quindi rappresentare graficamente sul piano Q_0, Q_1, trovando le due intercette con gli assi e poi tracciando il segmento che le congiunge (retta di bilancio). Le intercette con i due assi sono:

Ascissa: $Q_1 = 0$, $\rightarrow$ $231 - 1{,}1\, Q_0 = 0$, $\rightarrow$ $231 = 1{,}1\, Q_0$, $\rightarrow$ $\mathbf{Q_0} = \frac{231}{1{,}1} \mathbf{= 210}$.

Ordinata: $Q_0 = 0$, $\rightarrow$ $\mathbf{Q_1} = 231 - 1{,}1 * 0 = 231 - 0 \mathbf{= 231}$.

Quindi le due intercette sono di coordinate: (210; 0), (0; 231). Rappresentiamo quindi il vincolo di bilancio nel seguente grafico, notando dall'equazione che ha pendenza negativa ed uguale a $-1{,}1 = -(1 + i)$.



D. Quando si da eguale peso al consumo presente e futuro, β = 1, l'utilità marginale del bene futuro diviene:

$UMa_{Q1} = \beta / Q_1, = 1 / Q_1.$

Possiamo quindi calcolarci il saggio marginale di sostituzione (tra consumo presente e consumo futuro) con la formula:

$$SMaS_{Q1,Q0} = \frac{UMa_{Q0}}{UMa_{Q1}} = \frac{\mathbf{1/Q_0}}{\mathbf{1/Q_1}} = \frac{\mathbf{Q_1}}{\mathbf{Q_0}}.$$

La scelta ottima del profilo intertemporale del consumo, Q_0* e Q_1*, sarà quella che: da una parte rispetta il vincolo di bilancio; *e* contemporaneamente assicurerà l'uguaglianza tra il SMaS e il prezzo relativo tra i due beni, cioè, 1 + i. Deve quindi valere:

$Q_1 / Q_0 = 1 + i = 1,1.$

$Q_1 = 1,1\ Q_0.$

La scelta ottima, Q_0* e Q_1*, sarà analiticamente la soluzione del sistema di due equazioni lineari:

$$\begin{cases} Q_1 = 1,1\ Q_0 \\ Q_1 = 231 - 1,1\ Q_0 \end{cases}$$

Che, risolto per sostituzione, diviene:

$$1,1\ Q_0 = 231 - 1,1\ Q_0$$

$$2,2\ Q_0 = 231$$

$$\boldsymbol{Q_0^*} = {}^{231}/_{2,2} = {}^{210}/_{2} = \mathbf{105}.$$

Sostituendo Q_0* nella prima equazione del sistema otteniamo infine Q_1*:

$Q_1 = 1,1\ Q_0$. → $\mathbf{Q_1^*} = 1,1\ Q_0^* = 1,1 * 105 = \mathbf{115,5}$.

Notiamo quindi che se non scontiamo il futuro (β = 1) & i > 0, preferiamo consumare di più domani che oggi (Q_1 > Q_0*).*

E. In ogni casi in cui $\beta \neq 1$, la formula generale del saggio marginale di sostituzione è:

$$SMaS_{Q1,Q0} = \frac{UMa_{Q0}}{UMa_{Q1}} = \frac{\mathbf{1/Q_0}}{\boldsymbol{\beta}\mathbf{/Q_1}} = \frac{\mathbf{Q_1}}{\boldsymbol{\beta}\ \mathbf{Q_0}}.$$

Ancora una volta la scelta ottima corrisponde alla tangenza tra la curva di indifferenza e il vincolo di bilancio. per cui il SMaS deve eguagliare la pendenza del vincolo di bilancio, per cui abbiamo:

$SMaS = Q_1 / (\beta\ Q_0) = 1 + i.$

Esplicitando per Q_1 otteniamo quindi:

$Q_1 = (1 + i) * \beta * Q_0.$

Sostituendo i valori di i e β del nostro esercizio, otteniamo quindi:

$\mathbf{Q_1} = (1{,}1) * (10 / 11) * Q_0. = (11 / 11)\ Q_0 = \mathbf{Q_0}.$

Cioè, la condizione di tangenza implica che [nel nostro caso in cui $\beta = 1/ (1 + i)$] il consumo futuro sia identico al consumo presente.!

La scelta ottima, Q_0* e Q_1*, sarà analiticamente *ancora* la soluzione del sistema delle due equazioni lineari che esprimono il rispetto del vincolo (immutato) e la tangenza tra la nuova curva di indifferenza e il vincolo stesso. Formalmente:

$$\begin{cases} Q_1 = Q_0 \\ Q_1 = 231 - 1{,}1\ Q_0 \end{cases}$$

Che, risolto per sostituzione, diviene:

$$Q_0 = 231 - 1{,}1\ Q_0 \ \rightarrow\ 2{,}1\ Q_0 = 231$$

$$\boldsymbol{Q_0^{*\prime}} = {}^{231}/_{2,1} = \mathbf{110} = \boldsymbol{Q_1^{*\prime}}.$$

Notiamo che con $\beta \equiv 1/ (1 + i)$, $\rightarrow$ $Q_0* = Q_1*$.

F. Infine nel caso $\beta = 0{,}8$, possiamo sostituirlo nella condizione di tangenza per $\beta \neq 1$ ottenendo:

$SMaS = Q_1 / (\beta\ Q_0) = 1 + i.$

$Q_1 = (1 + i) * \beta * Q_0.$

$\mathbf{Q_1} = (1{,}1) * (8 / 10) * Q_0. = (88 / 10)\ Q_0 = \mathbf{0{,}88\ Q_0}.$

La scelta ottima, Q_0* e Q_1*, sarà analiticamente *ancora* la soluzione del sistema delle due equazioni lineari che esprimono il rispetto del vincolo (immutato) e la tangenza tra la nuova curva di indifferenza e il vincolo stesso. Formalmente:

$$\begin{cases} Q_1 = 0{,}88\ Q_0 \\ Q_1 = 231 - 1{,}1\ Q_0 \end{cases}$$

Che, risolto per sostituzione, diviene:

$$0{,}88\ Q_0 = 231 - 1{,}1\ Q_0 \ \rightarrow\ 1{,}98\ Q_0 = 231$$

$$\boldsymbol{Q_0^{*\prime\prime}} = {}^{231}/_{1,98} = \mathbf{116},(\mathbf{6}).$$

Sostituendo Q_0*’’ nella prima equazione del sistema otteniamo infine Q_1*’’:

$Q_1'' = 0{,}88\ Q_0''.$ $\rightarrow$ $\mathbf{Q_1*''} = 0{,}88\ Q_0*'' = 0{,}88 * 116{,}(6) = \mathbf{102{,}(6)}.$

Notiamo che preferendo meno il futuro: $Q_0* \uparrow$ *e* $Q_1* \downarrow$, *rispetto a prima.*

G. Definendo il risparmio nel periodo corrente (oggi) come la differenza tra il reddito (la dotazione) corrente e il consumo ottimale corrente, cioè formalmente:

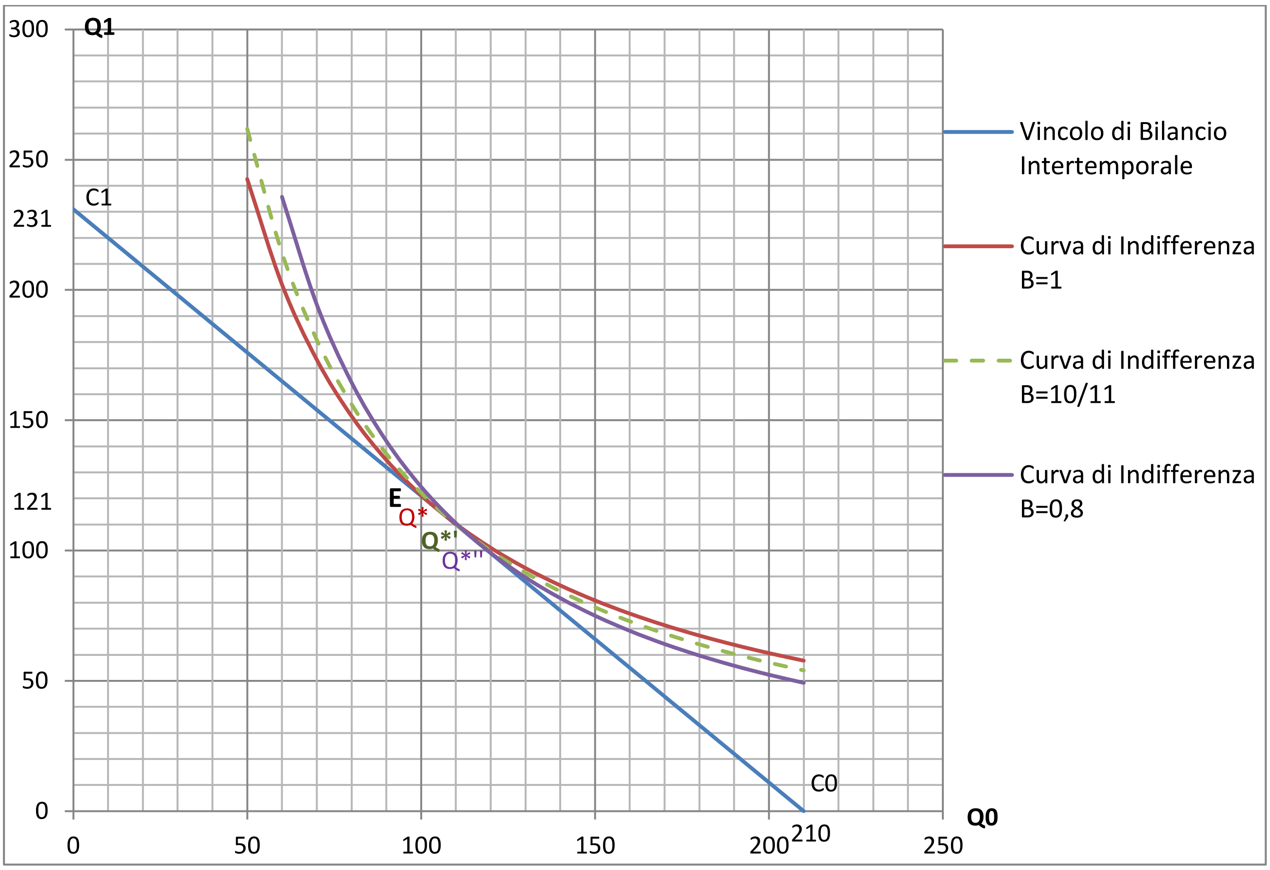
$$S_0 = E_0 – Q_0^*,$$

considerando che nei tre scenari abbiamo comunque $E_0 = 100$, con ovvia notazione avremo i 3 valori del risparmio corrente:

$$S_0^* = E_0 – Q_0^* = 100 – 105 = – 5;$$
$$S_0^{*'} = E_0 – Q_0^{*'} = 100 – 110 = – 10;$$
$$S_0^{*''} = E_0 – Q_0^{*''} = 100 – 116,(6) = – 16,(6).$$

Notiamo che al diminuire di β *mi indebito sempre di più.*

H. Infine, nell’analisi grafica, dobbiamo considerare che, mentre il vincolo di bilancio è comune ai tre scenari, le tre diverse preferenze intertemporali si manifestano in tre diverse curve di indifferenza (che essendo relative a preferenze diverse possono, come nel nostro caso, intersecarsi). Ciascuna curva di indifferenza sarà tangente allo stesso vincolo di bilancio in un suo diverso punto, corrispondente quindi a diverse coppie di valori di Q_0^* *e* Q_1^*, che infatti devono essere esattamente quelle coppie ricavate analiticamente nei punti precedenti dell’esercizio.



Legenda dei punti sul grafico:

E = (E0; E1) = (100; 121)	Q* = (Q0*; Q1*) = (105; 115,5)
C0 = (E0+E1/(1+i); 0) = (210; 0)	Q*' = (Q0*'; Q1*') = (110; 110)
C1 = (0; E1+(1+i)E0) = (0; 231)	Q*'' = (Q0*''; Q1*'') = (116,*6*; 102,*6*) .