Università degli Studi di Roma Tor Vergata.

Corso di

Microeconomia

(Corsi di Laurea Triennali CLEMIF e CLEOT)

Prof. Alessandro Piergallini

Assistente: Dott. Andrea Pisante

(andrea.pisante2014@libero.it , ricevimento ogni lunedì dopo l'esercitazione)

Anno Accademico 2015-16

Esercitazione 8 – 18 aprile 2016 – Testo e Soluzioni

1. **Consideriamo un modello di equilibrio economico generale di un economia di puro scambio, in cui sono presenti due consumatori (Primo e Secondo) e due beni, a e b. Le dotazioni di Primo sono: $Q_{a,1}$ = 72/11 unità del primo bene, e $Q_{b,1}$ = 6 unità del secondo bene. Le dotazioni di Secondo sono: $Q_{a,2}$ = 60/11 unità del primo bene, e $Q_{b,2}$ = 30 unità del secondo bene. Le preferenze di Primo sono descritte da: $UMa_{a,1} = 3 / Q_{a,1}$ e $UMa_{b,1} = 1 / Q_{b,1}$. Le preferenze di Secondo sono descritte da: $UMa_{a,2} = 1 / Q_{a,2}$ e $UMa_{b,2} = 2 / Q_{b,2}$. Le dotazioni totali dei due beni nell'economia sono: Q_a = 12 unità del primo bene e Q_b = 36 unità del secondo bene. Controllare se l'allocazione è Pareto-ottimale.**

Risposte

(riferimento nel testo, capitolo 11, in particolare il paragrafo 11.4)

L'efficienza allocativa è una condizione necessaria per la Pareto-ottimalità, per cui verifichiamo inizialmente che per ogni bene si abbia che la dotazione dell'economia nel suo complesso sia interamente distribuita nelle allocazioni tra i due agenti per ognuno dei due beni. Lo verifichiamo formalmente:

$Q_a = Q_{a,1} + Q_{a,2}$ → 12 = 72/11 + 60/11 = (72+60)/11 = 132/11 = 12 ☺

$Q_b = Q_{b,1} + Q_{b,2}$ → 36 = 6 + 30 = 36 ☺

L'altro requisito per la Pareto-ottimalità è l'allocazione implichi l'uguaglianza dei SMaS dei due agenti. Calcoliamo quindi per ogni agente il valore del proprio SMaS in corrispondenza delle rispettive dotazioni, ottenendo quindi:

$$SMaS_1 = \frac{UMa_{a,1}}{UMa_{b,1}} = \frac{3/Q_{a,1}}{1/Q_{b,1}} = 3\ \frac{Q_{b,1}}{Q_{a,1}} = 3\ \frac{6}{72/11} = 3\ \frac{1}{12/11} = \frac{3*11}{12} = \mathbf{\frac{11}{4}}$$

$$SMaS_2 = \frac{UMa_{a,2}}{UMa_{b,2}} = \frac{1/Q_{a,2}}{2/Q_{b,2}} = \frac{1}{2}\ \frac{Q_{b,2}}{Q_{a,2}} = \frac{1}{2}\ \frac{30}{60/11} = \frac{1}{2}\ \frac{1}{2/11} = \frac{11}{2*2} = \mathbf{\frac{11}{4}}$$

I due SMaS sono uguali, quindi l'allocazione efficiente è anche Pareto-ottimale.

2. **Consideriamo un modello di equilibrio economico generale di un economia con produzione così caratterizzata: la frontiera delle possibilità produttive è descritta dall'equazione (1/8) * $Q_a^2 + Q_b^2 = 96$, dove Q_a e Q_b sono le quantità prodotte dei due beni a e b; il saggio marginale di trasformazione è SMaT = Q_a / 8 Q_b ; i consumatori sono tutti identici e hanno un saggio marginale di sostituzione pari a SMaS = Q_b / 2 Q_a ; la produzione è di 16 unità del primo bene e di 8 unità del secondo bene. Si verifichi se l'allocazione è efficiente e se è anche Pareto-ottimale.**

Risposte

(riferimento nel testo, capitolo 11, in particolare il paragrafo 11.4)

In un economia con produzione, verificare l'efficienza allocativa vuol dire verificare che le quantità prodotte dei due beni appartengano alla frontiera delle possibilità produttive e quindi soddisfino la relativa equazione. Sostituendo i valori lo verifichiamo formalmente:

$$96 = (1/8) * Q_a^2 + Q_b^2 = (1/8) * (16)^2 + (8)^2 = 256 / 8 + 64 = 32 + 64 = 96$$ ☺

Quindi le quantità prodotte dei due beni sono un'allocazione efficiente (essendo sia possibili che non inefficienti).

L'ulteriore requisito per la Pareto-ottimalità è che il livello dei due beni prodotti implichi l'uguaglianza tra il SMaS dei consumatori (ipotizzati identici) e il SMaT (condizione che sappiamo equivalere alla tangenza della curva di indifferenza con la frontiera delle possibilità produttive) in corrispondenza di Q_a =16 e Q_b = 8.

Calcoliamo quindi il valore del SMaS e del SMaT in corrispondenza delle quantità prodotte e consumate dei due beni, ottenendo quindi:

$$SMaS = \frac{Q_b}{2Q_a} = \frac{8}{2*16} = \frac{8}{32} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

$$SMaT = \frac{Q_a}{8Q_b} = \frac{16}{8*8} = \frac{16}{64} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

Dato che in corrispondenza delle quantità prodotte e consumate dei due beni abbiamo SMaS = SMaT, quindi l'allocazione efficiente è anche Pareto-ottimale.

3. **Consideriamo il gioco noto come "dilemma del prigioniero", nella sua forma originale, presentato nella nota 3 di pagina 199-200 del testo, a cui si rinvia.**

    A. **Rappresentatene la matrice dei pagamenti.**

    B. **Ricavatene l'equilibrio in strategie dominanti.**

    C. **Argomentare se o meno l'equilibrio è Pareto-ottimale.**

Risposte

(riferimento nel testo, il paragrafo 12.1 Il dilemma del prigioniero)

A. **Rappresentatene la matrice dei pagamenti.**

Definiamo: P1 il primo prigioniero e P2 il secondo; le strategie di P1, che poniamo sulla seconda e terza riga, sono C1 se confessa e NC1 se non confessa; le strategie di P2, che poniamo sulla seconda e terza colonna, sono C2 se confessa e NC2 se non confessa. Costruiamo quindi, in base alle possibili strategie, la matrice dei pagamenti, intesi come "sconti di pena" (così seguendo la nota a pagina 200 del testo), che P1 e P2 vogliono massimizzare. Per esempio: se P1 confessa (riga C1) & P2 non confessa (colonna NC2), P1 riceve 30 anni di sconto di pena (esce di prigione), e P2 riceve nessuno sconto di pena (viene condannato a 30 anni), quindi nella relativa casella della matrice (incrocio della riga C1 con la colonna NC2) il primo numero è 30 e il secondo 0; e così via per le altre caselle. Otteniamo quindi la matrice dei pagamenti seguente. (Notate che se ambedue confessano, C1 & C2, vengono condannati entrambi a 20 anni ricevendo entrambi uno sconto di soli 10 anni. Se ambedue non confessano, NC1 & NC2, vengono condannati entrambi a soli 10 anni ricevendo entrambi uno sconto "implicito" di 20 anni.)

	C2	NC2
C1	10; 10	30; 00
NC1	00; 30	20; 20

B. **Ricavatene l'equilibrio in strategie dominanti.**

Consideriamo P1: se P2 confessa (colonna C2) la sua strategia preferibile è C1, cioè confessare, perché 10 > 00; se P2 non confessa (colonna NC2) la sua strategia preferibile è C1, cioè confessare, perché 30 > 20. Quindi per qualsiasi possibile strategia di P2, **la strategia C1 è dominante**. Quindi P1, sulla base della sua razionalità individuale, sceglierà sempre di confessare (C1). Illustriamo questo *grassettando* C1 nella tabella seguente.

Dato che la matrice che rappresenta il gioco è perfettamente **simmetrica, anche per P2 esiste una identica strategia dominante, confessare, C2.** Illustriamo questo *grassettando* C2 nella tabella seguente.

Nel gioco del dilemma del prigioniero quindi ambedue i giocatore sceglieranno di confessare, in quanto strategia dominante per entrambi. Esisterà quindi un equilibrio in strategie dominanti, graficamente all'intersezione della riga C1 con la colonna C2, a cui è associato, per ogni giocatore, un pagamento (sconto di pena) di soli 10 anni. **.** Illustriamo questo *grassettando* i rendimenti 10 & 10 nella casella centrale della tabella seguente.

	C2	NC2
C1	**10; 10**	30; 00
NC1	00; 30	*20*; *20*

C. Argomentare se o meno l'equilibrio è Pareto-ottimale.

L'equilibrio in strategie dominanti del precedente gioco [strategie C1 & C2, rendimenti 10 & 10], non è un'allocazione Pareto-ottimale. Sebbene gli esiti di C1 & NC2 e di NC1 & C2 non portino a miglioramenti paretiani, perché in entrambi i casi solo un prigioniero sta meglio, mentre l'altro sta peggio, rispetto all'equilibrio C1 & C2; esiste un'allocazione Pareto-superiore (dal punto di vista dei prigionieri!). Infatti se ambedue non confessassero, quindi NC1 & NC2, entrambi starebbero meglio ricevendo un pagamento di 20 anni di sconto (implicito) di pena ciascuno (esito in corsivo nella precedente matrice). In ciò consiste il "fallimento del mercato" insito nel dilemma del prigioniero: a differenza dei contesti concorrenziali, infatti, ora la razionalità individuale non conduce alla razionalità collettiva (dei prigionieri), non assicurando quindi il loro massimo benessere sociale.

4. Consideriamo un gioco in cui due giocatori, 1 e 2, hanno ciascuno la possibilità di scegliere tra due strategie, A e B. Le utilità dei due giocatori per ciascuno dei quattro possibili esiti sono rappresentate nella seguente matrice dei pagamenti:

	A_2	**B_2**
A_1	**65; 55**	**30; 60**
B_1	**40; 30**	**20; 20**

[La lettura della matrice dei pagamenti è identica a quella di pagina 199 del testo (anche se la nostra matrice non è simmetrica), per cui, per esempio, se 1 sceglie la strategia A e 2 sceglie la strategia B, 1 riceverà 30 e 2 riceverà 60.]

A. Individuare per ogni giocatore e la strategia ottima per ogni strategia scelta dall'altro giocatore.

B. Calcolare l'equilibrio del gioco.

Risposte

(riferimento nel testo, il paragrafo 12.1 Il dilemma del prigioniero e 15.4)

A. Partiamo considerando le **scelte del giocatore 1:** se 2 sceglie la strategia A (colonna A2) la sua strategia preferibile è A1, perché 65 > 40, quindi *grassettiamo* 65 nella tabella seguente; se 2 sceglie la strategia B (colonna B2) la sua strategia preferibile è A1, perché 30 > 20, quindi *grassettiamo* 30 nella tabella seguente. Quindi per qualsiasi possibile strategia di 2, **la strategia A1 è dominante, per il primo giocatore**, che, sulla base della sua razionalità individuale, sceglierà sempre. Illustriamo questo *grassettando* A1 nella tabella seguente.

Dato che la matrice che rappresenta il gioco **non è simmetrica, dobbiamo analizzare nel dettaglio le scelte anche di 2.** Se 1 sceglie la strategia A1, è razionale per il giocatore 2 scegliere B2, in quanto 60 > 55, quindi *grassettiamo* 60 nella relativa casella. Se 1 sceglie la strategia B1, è razionale per il giocatore 2 scegliere A2, in quanto 30 > 20, quindi *grassettiamo* 30 nella relativa casella. A differenza del precedente esercizio e del giocatore 1 del presente esercizio, in questo gioco **il giocatore 2 non ha una strategia dominante**, cioè una strategia (fissa) che per lui è la risposta ottimale alle diverse strategie dell'altro giocatore. Infatti ora preferisce A2 se 1 gioca B1, e preferisce B2 se 1 gioca A1. Quindi non giocherà con sicurezza nessuna strategia.

Riportiamo quindi nella seguente matrice dei pagamenti quanto finora visto.

	A_2	B_2
A_1	**65;** 55	**30; 60**
B_1	40**; 30**	20**;** 20

B. Il gioco ha comunque un equilibrio, anche se meno diretto dell'equilibrio in strategie dominanti precedentemente visto. Ricordiamo che in questo tipo di giochi, la struttura del gioco (la matrice dei pagamenti) è conoscenza comune tra i due giocatori. Questo implica che ad una più approfondita riflessione il giocatore 2 sa che il giocatore 1 ha una strategia dominante, A1, che è per quest'ultimo razionale giocare comunque, anche se non sa che startegia giocherà 2. Conseguentemente, però, il giocatore 2 sa che la strategia dominata B1 del giocatore 1, proprio perché dominata non verrà mai giocata (sarebbe irrazionale per 1), quindi la si può eliminare del gioco. Quindi per 2 il gioco si riduce alla considerazione della sua scelta a fronte di 1 che gioca A1, cioè alla sola seconda riga della matrice. A questo punto però per 2 esiste una sola scelta razionale: giocare la strategia B2 a fronte di A1 giocata da 1, perché 60 > 55. L'unico equilibrio razionale del gioco sarà quindi la casella individuata da A1 & B2, cui corrispondono per 1 & 2 pagamenti rispettivamente di 30 & 60.

La precedente determinazione dell'equilibrio, può essere anche ricavata ricorrendo alla nozione di equilibrio di Nash, introdotta nel paragrafo 15.4 del testo. Sinteticamente, in una situazione di interdipendenza strategica con due giocatori si ha un equilibrio di Nash, quando nessun soggetto ha motivo di cambiare la propria strategia, perché con essa il valore della sua funzione obiettivo è massimo, date la strategia scelta dall'altro soggetto.

Nel gioco di questo esercizio, la coppia di strategie A1 & B2 è infatti un equilibrio di Nash, ed è anche l'unico equilibrio di Nash del gioco. Notiamo infatti che tale casella ha, ed è l'unica ad avere entrambi i pay-off **grassettati**. Questo significa che è la sola possibile coppia di strategie dei due giocatori, tale che per tutti e due i giocatori la propria strategia (A1 & B2 rispettivamente) è risposta ottima alla strategia dell'altro (B2 & A1 rispettivamente), il che implica che non c'è incentivo a cambiarla una volta adottatala. La coppia di strategie A1 & B2 è quindi l'equilibrio di Nash del nostro gioco.

Conclusivamente, l'equilibrio di Nash di un gioco, quando esiste, si individua contrassegnando (per esempio *grassettando o cerchiando*) per ciascun giocatore, il pay-off relativo alla strategia che è risposta ottima a ciascuna possibile strategia dell'altro giocatore. Le coppie di pay-off che risultano contrassegnate da entrambi i giocatori, essendo reciprocamente risposte ottime, individuano per costruzione coppie di strategie che sono equilibri di Nash del gioco.

5. **Consideriamo un gioco in cui due giocatori, 1 e 2, hanno ciascuno la possibilità di scegliere tra tre strategie, A, B e C. Le utilità dei due giocatori per ciascuno dei nove possibili esiti sono rappresentate nella seguente matrice dei pagamenti:**

	A_2	**B_2**	**C_2**
A_1	**80; 70**	**45; 75**	**30; 55**
B_1	**55; 45**	**35; 35**	**55; 40**
C_1	**85; 20**	**25; 25**	**35;30**

[La lettura della matrice dei pagamenti è identica a quella di pagina 199 del testo (anche se la nostra matrice non è simmetrica e ha più strategie), per cui, per esempio, se 1 sceglie la strategia A e 2 sceglie la strategia B, 1 riceverà 45 e 2 riceverà 75.]

A. **Individuare per ogni giocatore e la strategia ottima per ogni strategia scelta dall'altro giocatore.**

B. Calcolare l'equilibrio del gioco.

Risposte

(riferimento nel testo, il paragrafo 12.1 Il dilemma del prigioniero e 15.4)

A. Giocatore 1:

Se 2 gioca A2, è razionale scegliere C1 perché 85 > 80 > 55, *grassettiamo 85*;

Se 2 gioca B2, è razionale scegliere A1 perché 45 > 35 > 25, *grassettiamo 45*;

Se 2 gioca C2, è razionale scegliere B1 perché 55 > 35 > 30, *grassettiamo 55*;

Giocatore 2:

Se 1 gioca A1, è razionale scegliere B2 perché 75 > 70 > 55, *grassettiamo 75*;

Se 1 gioca B1, è razionale scegliere A2 perché 45 > 40 > 35, *grassettiamo 45*;

Se 1 gioca C1, è razionale scegliere C2 perché 30 > 25 > 20, *grassettiamo 30*;

Abbiamo così individuato per ognuno dei due giocatori la strategia ottima per ciascuna strategia che l'altro giocatore può scegliere. Riportiamo il tutto nella matrice seguente.

	A_2	B_2	C_2
A_1	80; 70	**45**; **75**	30; 55
B_1	55; **45**	35; 35	**55**; 40
C_1	**85**; 20	25; 25	35;**30**

B. Dato che non esistono strategie dominanti (e quindi a fortiori equilibri in strategie dominanti), l'unico equilibrio possibile nel nostro gioco è l'equilibrio di Nash corrispondente alla coppia di strategie A1 & B2, cui sono associati i pagamenti 45 per il primo giocatore e 75 per il secondo. Infatti è l'unica casella della matrice che rappresenta una combinazione di strategie che sono mutualmente ciascuna la risposta ottimale a quell'esatta strategia dell'altro giocatore. (come evidenziato nella tabella dal fatto di essere l'unica ad avere entrambi i pagamenti *grassettati*) ☺