

Esercitazione 2

Esercizio 1

Sono state intervistate 40 famiglie, e in particolare, è stato chiesto il numero X di televisori posseduti e il numero Y di componenti della famiglia. I dati sono raccolti nella seguente tabella:

		Numero Componenti famiglia, Y			
Numero televisori X		1	2	3	Totale
	0	0	5	3	8
	1	6	14	10	30
	2	0	1	1	2
	Totale	6	20	14	40

Si scriva, senza fare calcoli, se i due caratteri sono indipendenti e si giustifichi la risposta.

Indipendenti?	Giustificare la risposta
----------------------	---------------------------------

Si calcolino le medie e le varianze del numero di televisori condizionatamente al numero di componenti della famiglia.

Medie condizionate	Varianze condizionate

Numero televisori X		$n_{X Y=1}$
	0	0
	1	6
	2	0
	Totale	6

Numero di televisioni condizionato a $Y=1$

x	$n_{X Y=2}$	$x \cdot n_{X Y=2}$	x^2	$x^2 \cdot n_{X Y=2}$
0	5	0	0	0
1	14	14	1	14
2	1	2	4	4
Totale	20	16		18

Numero di televisioni condizionato a $Y=2$

$$\bar{x}_{Y=2} = \frac{0 \times 5 + 1 \times 14 + 2 \times 1}{20} =$$

$$\bar{x}_{Y=2} = \frac{16}{20} = 0.8$$

$$M(X^2 | Y = 2) = \frac{0^2 \times 5 + 1^2 \times 14 + 2^2 \times 1}{20} = \frac{18}{20} = 0.9$$

$$\begin{aligned} \sigma_{X|Y=2}^2 &= M(X^2 | Y = 2) - (\bar{x}_{Y=2})^2 = \\ &= 0.9 - 0.8^2 = 0.26 \end{aligned}$$

x	$n_{X Y=3}$	$x \cdot n_{X Y=3}$	x^2	$x^2 \cdot n_{X Y=3}$
0	3	0	0	0
1	10	10	1	10
2	1	2	4	4
Totale	14	12		14

Numero di televisioni condizionato a $Y=3$

$$\bar{x}_{Y=3} = \frac{0 \times 3 + 1 \times 10 + 2 \times 1}{14} =$$

$$\bar{x}_{Y=3} = \frac{12}{14} = 0.857$$

$$M(X^2 | Y = 3) = \frac{0^2 \times 3 + 1^2 \times 10 + 2^2 \times 1}{14} = 1$$

$$\begin{aligned} \sigma_{X|Y=3}^2 &= M(X^2 | Y = 3) - (\bar{x}_{Y=3})^2 = \\ &= 1 - 0.857^2 = 0.2656 \end{aligned}$$

Si calcolino le medie e le varianze del numero di televisori condizionatamente al numero di componenti della famiglia.

Medie condizionate	Varianze condizionate
$\bar{x}_{Y=1} = \frac{6 \times 1}{6} = 1$	$M(X^2 Y = 1) = \frac{6 \times 1}{6} = 1$ $\sigma_{X Y=1}^2 = 0$
$\bar{x}_{Y=2} = \frac{0 \times 5 + 1 \times 14 + 2 \times 1}{20} = 0.8$	$M(X^2 Y = 2) = \frac{0^2 \times 5 + 1^2 \times 14 + 2^2 \times 1}{20} = 0.9$ $\sigma_{X Y=2}^2 = M(X^2 Y = 2) - (\bar{x}_{Y=2})^2 =$ $= 0.9 - 0.8^2 = 0.26$
$\bar{x}_{Y=3} = \frac{0 \times 3 + 1 \times 10 + 2 \times 1}{14} = 0.857$	$M(X^2 Y = 3) = \frac{0^2 \times 3 + 1^2 \times 10 + 2^2 \times 1}{14} = 1$ $\sigma_{X Y=3}^2 = M(X^2 Y = 3) - (\bar{x}_{Y=3})^2 =$ $= 1 - 0.857^2 = 0.2656$

Esercizio 2

Un'azienda produce lampadine in tre diversi stabilimenti (A, B e C). Si decide di valutare la durata in ore delle lampadine prodotte: a tal fine viene misurata la durata di 20 lampadine prodotte nello stabilimento A, di 17 lampadine prodotte nello stabilimento B e di 31 prodotte nello stabilimento C. Valutare la dipendenza fra la durata delle lampadine e lo stabilimento.

Durata delle lampadine	Stanilimento			Totale
	STAB.A	STAB.B	STAB.C	
0 - 50	3	2	4	9
50 - 150	6	6	9	21
150 - 250	7	5	10	22
250 - 300	4	4	8	16
Totale	20	17	31	68

$$\bar{x}_A = \frac{25 \times 3 + 100 \times 6 + 200 \times 7 + 275 \times 4}{20} = \frac{3175}{20} = 158.75$$

$$\bar{x}_B = \frac{25 \times 2 + 100 \times 6 + 200 \times 5 + 275 \times 4}{17} = \frac{2750}{17} = 161.76$$

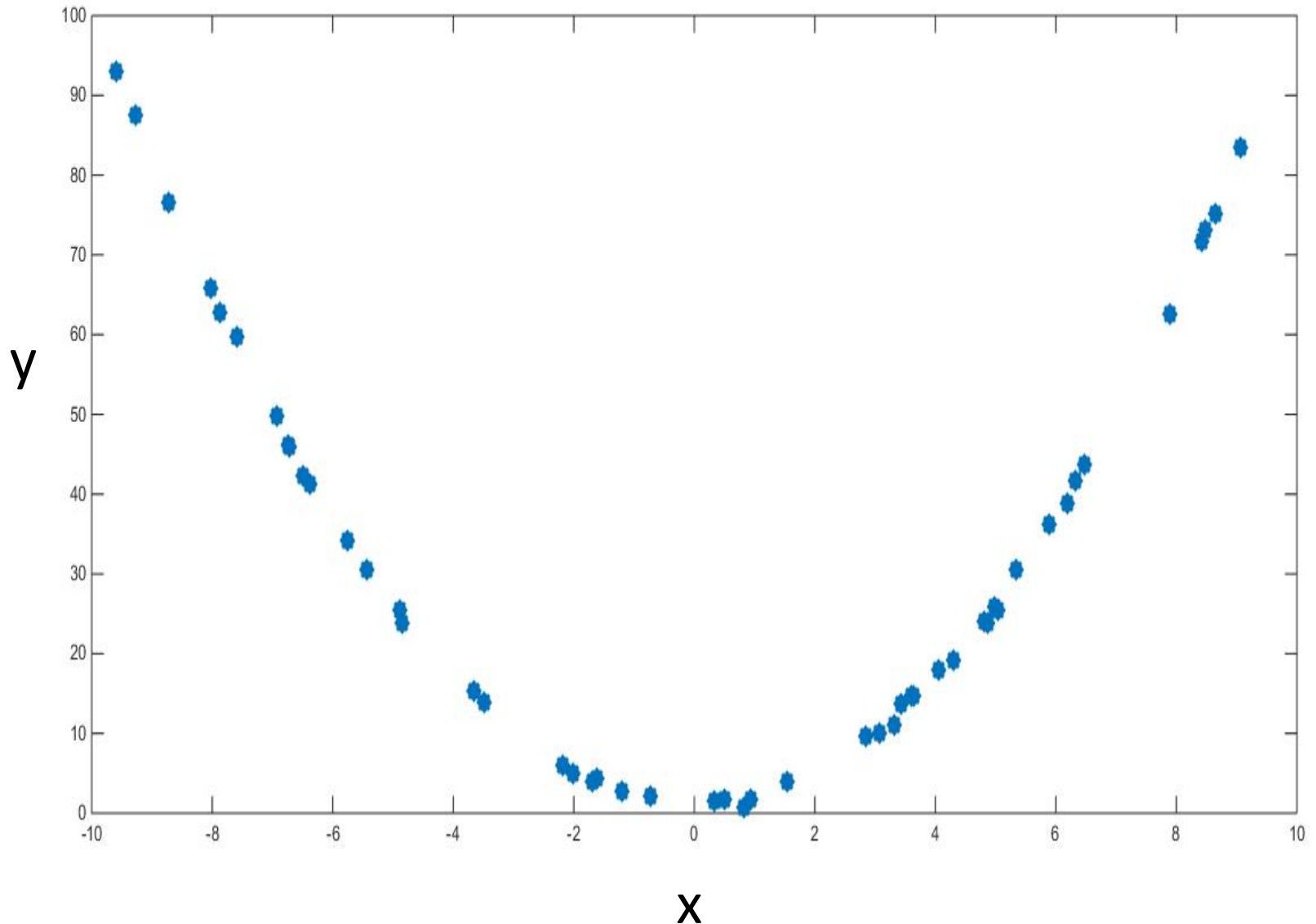
$$\bar{x}_C = \frac{25 \times 4 + 100 \times 9 + 200 \times 10 + 275 \times 8}{31} = \frac{5200}{31} = 167.74$$

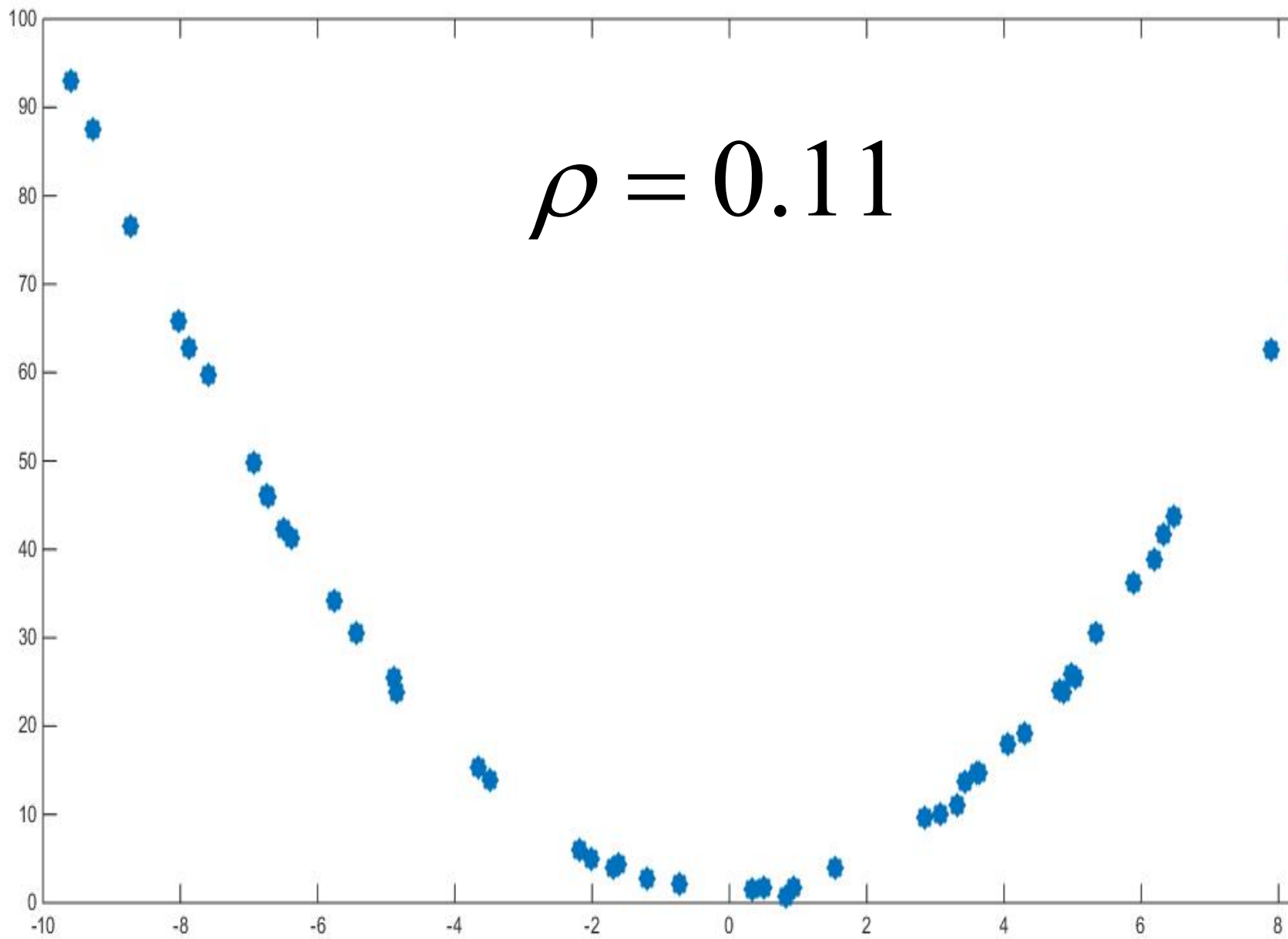
Esercizio 3

Valutare la dipendenza tra il carattere X e il carattere Y?
Quale valore plausibile per ρ ?

- ☐ -0,7
- ☐ 0.11
- ☐ 0.9

Valutare la dipendenza tra il carattere X e il carattere Y?





Esercizio 4

Valutare la correlazione tra X e Y

		Y			
		0	1	2	Totale
X	1	10	20	20	50
	2	10	10	0	20
	3	0	10	20	30
Totale		20	40	40	100

		Y			
		0	1	2	Totale
X	1	0.1	0.2	0.2	0.5
	2	0.1	0.1	0	0.2
	3	0	0.1	0.2	0.3
	Totale	0.2	0.4	0.4	1

$$\bar{y} = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.4 = 1.2$$

$$\bar{x} = 1 \times 0.5 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.3 = 1.8$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 = 0^2 \times 0.2 + 1^2 \times 0.4 + 2^2 \times 0.4 = 2$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1^2 \times 0.5 + 2^2 \times 0.2 + 3^2 \times 0.3 = 4$$

$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = 4 - 1.8^2 = 0.76$$

$$Var(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2 = 2 - 1.2^2 = 0.56$$

$$\bar{y} = \frac{0 \times 20 + 1 \times 40 + 2 \times 40}{100} = 1.2$$

$$\bar{x} = \frac{1 \times 50 + 2 \times 20 + 3 \times 30}{100} = 1.8$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 = \frac{0^2 \times 20 + 1^2 \times 40 + 2^2 \times 40}{100} = 2$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1^2 \times 50 + 2^2 \times 20 + 3^2 \times 30}{100} = 4$$

$$Var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = 4 - 1.8^2 = 0.76$$

$$Var(Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2 = 2 - 1.2^2 = 0.56$$

		Y			
		0	1	2	Totale
X	1	1×0=0 0.1	1×1=1 0.2	1×2=2 0.2	0.5
	2	2×0=0 0.1	2×1=2 0.1	2×2=4 0	0.2
	3	3×0=0 0	3×1=3 0.1	3×2=6 0.2	0.3
	Totale	0.2	0.4	0.4	

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.2 + 0 \times 0.1 + 2 \times 0.1$$

$$4 \times 0 + 0 \times 0 + 3 \times 0.1 + 6 \times 0.2 = 2.3$$

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y} = 2.3 - 1.8 \times 1.2 = 0.14$$

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{0.14}{\sqrt{0.76 \times 0.56}} = 0.2146$$

Esercizio 5

Consideriamo la seguente Serie doppia dei caratteri “numero di vani per abitazione” e “numero di componenti della famiglia” per vedere se esiste una relazione fra il numero di vani della casa acquistata e la numerosità della famiglia:

N. vani (X)	N. componenti della famiglia (Y)
3	5
2	2
3	4
5	7
4	5
2	1
1	2
2	2
3	2
1	2
26	32

	x	y	x-mu(x)	y-mu(y)	(x-mu(x))*(y-mu(y))	(x-mu(x))^2	(y-mu(y))^2
	3	5	0.4	1.8	0.72	0.16	3.24
	2	2	-0.6	-1.2	0.72	0.36	1.44
	3	4	0.4	0.8	0.32	0.16	0.64
	5	7	2.4	3.8	9.12	5.76	14.44
	4	5	1.4	1.8	2.52	1.96	3.24
	2	1	-0.6	-2.2	1.32	0.36	4.84
	1	2	-1.6	-1.2	1.92	2.56	1.44
	2	2	-0.6	-1.2	0.72	0.36	1.44
	3	2	0.4	-1.2	-0.48	0.16	1.44
	1	2	-1.6	-1.2	1.92	2.56	1.44
somma	26	32	0	0	18.8	14.4	33.6
media	2,6	3,2	0	0	1.88	1.44	3.36

var x	1,44
var y	3,36

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 1,88$$

$$\rho(X, Y) = 0.85$$

	x	y	x^2	y^2	xy
	3	5	9	25	15
	2	2	4	4	4
	3	4	9	16	12
	5	7	25	49	35
	4	5	16	25	20
	2	1	4	1	2
	1	2	1	4	2
	2	2	4	4	4
	3	2	9	4	6
	1	2	1	4	2
somma	26	32	82	136	102
media	2,6	3,2	8,2	13,6	10,2

cov	1,88
var x	1,44
var y	3,36
corr	0,85