

Esercitazione di Probabilità

Corso di Statistica

Spazio campionario ed eventi. Lo spazio campionario Ω è l'insieme di tutti i possibili esiti di un esperimento casuale. Un evento A è un sottoinsieme di Ω . Se tutti gli esiti sono equiprobabili, la probabilità di un evento è

$$P(A) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}.$$

La probabilità del complementare è $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Eventi mutuamente esclusivi e indipendenti. Due eventi A e B sono *mutuamente esclusivi* se $P(A \cap B) = 0$. Sono *indipendenti* se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Probabilità condizionata. La probabilità che avvenga A dato che è avvenuto B è

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Teorema della probabilità totale. Se $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono una partizione dello spazio campionario, allora

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i).$$

Teorema di Bayes. Permette di invertire la condizione:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j)P(A_j)}.$$

Variabili aleatorie discrete. Una variabile aleatoria X associa a ogni esito $\omega \in \Omega$ un numero reale. La sua distribuzione di probabilità è $P(X = x_i)$. Il valore atteso e la varianza sono

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i), \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Per una trasformazione lineare $Y = aX + b$:

$$E(Y) = aE(X) + b, \quad \text{Var}(Y) = a^2 \text{Var}(X).$$

Covarianza e correlazione. La covarianza misura la dipendenza lineare tra due variabili casuali:

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

In generale, $E(XY) \neq E(X)E(Y)$, tranne nel caso in cui X e Y siano indipendenti. Il coefficiente di correlazione (o correlazione lineare di Pearson) è

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

dove σ_X e σ_Y sono le deviazioni standard di X e Y .

Distribuzione binomiale. Se $X \sim \text{Bin}(n, p)$ rappresenta il numero di successi in n prove indipendenti con probabilità p :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1-p).$$

dove il coefficiente binomiale è definito come:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}.$$

Distribuzione uniforme continua. Per $X \sim U(a, b)$ la densità è costante:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b.$$

Si ha $E(X) = \frac{a+b}{2}$ e $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Distribuzione normale. Per $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ la densità è

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Si standardizza con $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ e si usano le tavole della funzione $\Phi(z)$ per calcolare le probabilità.

Test diagnostici e teorema di Bayes. Sensibilità: $P(T^+|M)$, Specificità: $P(T^-|M^c)$. La probabilità che un soggetto sia malato dato test positivo è

$$P(M|T^+) = \frac{P(T^+|M)P(M)}{P(T^+|M)P(M) + P(T^+|M^c)P(M^c)}.$$

Esercizi

1. **(Spazi campionari ed eventi)** Si lancia un dado equo due volte.
 - a) Definire lo spazio campionario Ω .
 - b) Calcolare la probabilità che la somma dei due lanci sia uguale a 8.
 - c) Calcolare la probabilità che almeno uno dei due lanci sia un 6.
2. **(Probabilità complementare)** In un'urna ci sono 5 palline rosse, 3 palline blu e 2 palline verdi. Si estrae una pallina a caso.
 - a) Qual è la probabilità di estrarre una pallina rossa?
 - b) Qual è la probabilità di NON estrarre una pallina rossa?
3. **(Eventi mutuamente esclusivi)** Un'azienda produce componenti elettronici. Il 15% dei componenti presenta difetti di tipo A, il 20% presenta difetti di tipo B, e nessun componente può avere entrambi i difetti contemporaneamente.
 - a) Calcolare la probabilità che un componente scelto a caso sia difettoso.
 - b) Calcolare la probabilità che un componente non sia difettoso.

Dopo un aggiornamento del processo produttivo, compare anche un **difetto di tipo C**, che si manifesta nel 5% dei componenti. Questo difetto **può coesistere** con A o B (cioè non è mutuamente esclusivo).

- c) Calcolare la probabilità complessiva che un componente sia difettoso di qualsiasi tipo (A, B o C), sapendo che C è indipendente da A e B.

Dopo una manutenzione della linea, il tasso di difettosità cambia:

- Difetti di tipo A: 10%
- Difetti di tipo B: 15%
- Difetti di tipo C: 5%

Tuttavia, ora il 2% dei componenti presenta **sia A che C**, e l'1% presenta **sia B che C**.

- d) Calcolare la nuova probabilità che un componente sia difettoso.

Il controllo automatico individua i difetti con le seguenti probabilità:

- Se il componente è difettoso, viene segnalato con probabilità 0.9 (sensibilità 90%).
 - Se il componente è privo di difetti, viene segnalato erroneamente come difettoso con probabilità 0.05 (falso positivo 5%).
- e) Calcolare la probabilità che un componente segnalato come difettoso lo sia davvero (Teorema di Bayes).

La produzione giornaliera è di 10 000 componenti.

- f) Calcolare il numero atteso di componenti realmente difettosi e di segnalazioni errate del sistema.
4. **(Probabilità condizionata)** In un'università, il 60% degli studenti è iscritto alla facoltà di Economia e il 40% alla facoltà di Ingegneria. Tra gli studenti di Economia, il 30% pratica uno sport, mentre tra gli studenti di Ingegneria il 50% pratica uno sport.
- a) Qual è la probabilità che uno studente scelto a caso pratichi uno sport?
 - b) Dato che uno studente pratica uno sport, qual è la probabilità che sia iscritto a Ingegneria?
5. **(Eventi indipendenti)** La probabilità che piova domani è 0.3 e la probabilità che faccia vento è 0.4. Supponiamo che questi due eventi siano indipendenti.
- a) Qual è la probabilità che domani piova E faccia vento?
 - b) Qual è la probabilità che domani piova O faccia vento (o entrambi)?
6. **(Teorema della probabilità totale)** Un'azienda riceve componenti da tre fornitori: il 50% dal fornitore A, il 30% dal fornitore B e il 20% dal fornitore C. La percentuale di componenti difettosi è rispettivamente 2%, 3% e 5% per i tre fornitori.
- a) Qual è la probabilità che un componente scelto a caso sia difettoso?
7. **(Teorema di Bayes)** Continuando dall'esercizio precedente, supponiamo di aver trovato un componente difettoso.
- a) Qual è la probabilità che provenga dal fornitore C?
 - b) Qual è la probabilità che provenga dal fornitore A?
8. **(Variabili aleatorie discrete)** Un'urna contiene 10 palline numerate da 1 a 10. Si estraggono 2 palline con reinserimento. Sia X il numero di palline pari estratte.
- a) Determinare la distribuzione di probabilità di X .
 - b) Calcolare il valore atteso $E(X)$.
 - c) Calcolare la varianza $\text{Var}(X)$.
9. **(Distribuzione binomiale)** Il 40% degli italiani legge regolarmente il giornale. Si intervistano 8 italiani scelti a caso.
- a) Qual è la probabilità che esattamente 3 di loro leggano regolarmente il giornale?
 - b) Qual è la probabilità che almeno 2 di loro leggano regolarmente il giornale?
 - c) Calcolare il numero atteso di lettori tra gli 8 intervistati.
10. **(Variabili aleatorie continue - Uniforme)** Il tempo di attesa alla fermata dell'autobus è distribuito uniformemente tra 0 e 15 minuti.
- a) Qual è la probabilità di attendere meno di 5 minuti?

- b) Qual è il tempo di attesa medio?
- c) Qual è la varianza del tempo di attesa?
11. **(Distribuzione normale - standardizzazione)** I punteggi ad un test sono distribuiti normalmente con media $\mu = 75$ e deviazione standard $\sigma = 10$.
- a) Qual è la probabilità che uno studente ottenga un punteggio superiore a 85?
- b) Qual è la probabilità che uno studente ottenga un punteggio compreso tra 70 e 80?
- c) Quale punteggio minimo deve ottenere uno studente per essere nel 10% migliore?
12. **(Bayes con test diagnostico)** Un test medico per una malattia rara ha le seguenti caratteristiche: la sensibilità (probabilità di test positivo dato malato) è 95%, la specificità (probabilità di test negativo dato sano) è 90%. La malattia colpisce l'1% della popolazione.
- a) Qual è la probabilità che una persona scelta a caso risulti positiva al test?
- b) Se una persona risulta positiva al test, qual è la probabilità che sia effettivamente malata?
13. **(Valore atteso e varianza)** Una variabile aleatoria Y ha la seguente distribuzione:

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$	0.1	0.3	0.4	0.2

- a) Calcolare $E(Y)$.
- b) Calcolare $E(Y^2)$.
- c) Calcolare $\text{Var}(Y)$.
- d) Se $W = 3Y - 2$, calcolare $E(W)$ e $\text{Var}(W)$.
14. **(Covarianza e correlazione)** Date due variabili aleatorie X e Y con la seguente distribuzione congiunta:

$X \backslash Y$	1	2	3
0	0.1	0.2	0.1
1	0.2	0.1	0.3

- a) Calcolare le distribuzioni marginali di X e Y .
- b) Calcolare $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$.
- c) Calcolare $\text{Cov}(X, Y)$.
- d) X e Y sono indipendenti? Giustificare la risposta.
15. **(Distribuzione normale - applicazione)** L'altezza delle donne in una popolazione si distribuisce normalmente con media 165 cm e deviazione standard 6 cm.
- a) Qual è la probabilità che una donna scelta a caso sia alta più di 170 cm?
- b) Qual è la probabilità che una donna sia alta tra 160 e 170 cm?
- c) Se si selezionano 100 donne, quante ci aspettiamo siano alte più di 175 cm?

Soluzioni

1. Soluzione:

a) $\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$, con $|\Omega| = 36$.

b) Eventi favorevoli per somma = 8: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) quindi 5 casi.

$$P(\text{somma} = 8) = \frac{5}{36} \approx 0.139$$

c) $P(\text{almeno un } 6) = 1 - P(\text{nessun } 6) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} \approx 0.306$

2. Soluzione:

a) Totale palline = 10. $P(\text{rossa}) = \frac{5}{10} = 0.5$

b) $P(\text{non rossa}) = 1 - P(\text{rossa}) = 1 - 0.5 = 0.5$

3. Soluzione:

a) Gli eventi sono mutuamente esclusivi, quindi:

$$P(\text{difettoso}) = P(A) + P(B) = 0.15 + 0.20 = 0.35$$

b) $P(\text{non difettoso}) = 1 - 0.35 = 0.65$

c) Aggiunta del difetto di tipo C (indipendente da A e B)

Dato che C può coesistere con A o B:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$$

Poiché C è indipendente da A e B:

$$P(A \cap C) = P(A)P(C) = 0.15 \times 0.05 = 0.0075$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C) = 0.20 \times 0.05 = 0.010$$

Quindi:

$$P(A \cup B \cup C) = 0.15 + 0.20 + 0.05 - 0.0075 - 0.010 = 0.3825$$

$$P(\text{difettoso}) = 0.3825$$

d) Dopo manutenzione (nuove percentuali)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C)$$

$$= 0.10 + 0.15 + 0.05 - 0.02 - 0.01 = 0.27 - 0.03 = 0.24$$

$$P(\text{difettoso}) = 0.24$$

e) Probabilità che un componente segnalato come difettoso lo sia davvero (Teorema di Bayes)

$$P(D|S) = \frac{P(S|D) \cdot P(D)}{P(S)}$$

Dove:

$$P(S) = P(S|D)P(D) + P(S|\bar{D})P(\bar{D})$$

Sostituendo:

$$P(S) = (0.9)(0.24) + (0.05)(0.76) = 0.216 + 0.038 = 0.254$$

$$P(D|S) = \frac{0.9 \times 0.24}{0.254} = \frac{0.216}{0.254} \approx 0.850$$

$P(D S) \approx 0.85$

f) Produzione di 10 000 componenti

$$\text{Componenti difettosi attesi} = 10\,000 \times 0.24 = 2\,400$$

$$\text{Componenti sani attesi} = 10\,000 - 2\,400 = 7\,600$$

$$\text{Segnalazioni corrette} = 0.9 \times 2\,400 = 2\,160$$

$$\text{Segnalazioni errate (falsi positivi)} = 0.05 \times 7\,600 = 380$$

$\begin{aligned} \text{Segnalazioni totali} &= 2\,160 + 380 = 2\,540 \\ \text{Percentuale segnalazioni corrette} &= \frac{2\,160}{2\,540} \approx 85\% \end{aligned}$

4. **Soluzione:** Sia E = studente di Economia, I = studente di Ingegneria, S = pratica sport.

a) Per il teorema della probabilità totale:

$$P(S) = P(S|E)P(E) + P(S|I)P(I) = 0.3 \times 0.6 + 0.5 \times 0.4 = 0.18 + 0.20 = 0.38$$

b) Per il teorema di Bayes:

$$P(I|S) = \frac{P(S|I)P(I)}{P(S)} = \frac{0.5 \times 0.4}{0.38} = \frac{0.20}{0.38} \approx 0.526$$

5. **Soluzione:** Sia P = pioggia, V = vento.

a) Poiché sono indipendenti:

$$P(P \cap V) = P(P) \times P(V) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$$

b)

$$P(P \cup V) = P(P) + P(V) - P(P \cap V) = 0.3 + 0.4 - 0.12 = 0.58$$

6. **Soluzione:** Sia D = componente difettoso.

a)

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) \\ &= 0.02 \times 0.5 + 0.03 \times 0.3 + 0.05 \times 0.2 = 0.01 + 0.009 + 0.01 = 0.029 \end{aligned}$$

7. **Soluzione:**

a)

$$P(C|D) = \frac{P(D|C)P(C)}{P(D)} = \frac{0.05 \times 0.2}{0.029} = \frac{0.01}{0.029} \approx 0.345$$

b)

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)} = \frac{0.02 \times 0.5}{0.029} = \frac{0.01}{0.029} \approx 0.345$$

8. **Soluzione:** X può assumere valori 0, 1, 2. Probabilità di pari = $\frac{5}{10} = 0.5$.

a) $X \sim \text{Binomiale}(n = 2, p = 0.5)$:

$$P(X = 0) = \binom{2}{0} (0.5)^0 (0.5)^2 = 0.25$$

$$P(X = 1) = \binom{2}{1} (0.5)^1 (0.5)^1 = 0.50$$

$$P(X = 2) = \binom{2}{2} (0.5)^2 (0.5)^0 = 0.25$$

b) $E(X) = np = 2 \times 0.5 = 1$

c) $\text{Var}(X) = np(1 - p) = 2 \times 0.5 \times 0.5 = 0.5$

9. **Soluzione:** $X \sim \text{Binomiale}(n = 8, p = 0.4)$

a)

$$P(X = 3) = \binom{8}{3} (0.4)^3 (0.6)^5 = 56 \times 0.064 \times 0.07776 \approx 0.279$$

b)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

$$P(X = 0) = (0.6)^8 \approx 0.0168$$

$$P(X = 1) = 8 \times 0.4 \times (0.6)^7 \approx 0.0896$$

$$P(X \geq 2) \approx 1 - 0.0168 - 0.0896 = 0.8936$$

c) $E(X) = np = 8 \times 0.4 = 3.2$

10. **Soluzione:** $X \sim \text{Uniforme}(a = 0, b = 15)$

a)

$$P(X < 5) = \frac{5 - 0}{15 - 0} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \approx 0.333$$

b)

$$E(X) = \frac{a + b}{2} = \frac{0 + 15}{2} = 7.5 \text{ minuti}$$

c)

$$\text{Var}(X) = \frac{(b - a)^2}{12} = \frac{15^2}{12} = \frac{225}{12} = 18.75$$

11. **Soluzione:** $X \sim N(\mu = 75, \sigma = 10)$

a)

$$Z = \frac{85 - 75}{10} = 1$$

$$P(X > 85) = P(Z > 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

b)

$$Z_1 = \frac{70 - 75}{10} = -0.5, \quad Z_2 = \frac{80 - 75}{10} = 0.5$$

$$P(70 < X < 80) = \Phi(0.5) - \Phi(-0.5) = 0.6915 - 0.3085 = 0.383$$

c) Per il 90-esimo percentile: $Z_{0.90} = 1.28$

$$x = \mu + Z\sigma = 75 + 1.28 \times 10 = 87.8$$

12. **Soluzione:** Sia M = malato, T^+ = test positivo.

$$P(M) = 0.01, P(T^+|M) = 0.95, P(T^-|M^c) = 0.90 \Rightarrow P(T^+|M^c) = 0.10$$

a)

$$\begin{aligned} P(T^+) &= P(T^+|M)P(M) + P(T^+|M^c)P(M^c) \\ &= 0.95 \times 0.01 + 0.10 \times 0.99 = 0.0095 + 0.099 = 0.1085 \end{aligned}$$

b)

$$P(M|T^+) = \frac{P(T^+|M)P(M)}{P(T^+)} = \frac{0.95 \times 0.01}{0.1085} = \frac{0.0095}{0.1085} \approx 0.0876$$

13. **Soluzione:**

a)

$$E(Y) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 + 3 \times 0.2 = 0 + 0.3 + 0.8 + 0.6 = 1.7$$

b)

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= 0^2 \times 0.1 + 1^2 \times 0.3 + 2^2 \times 0.4 + 3^2 \times 0.2 \\ &= 0 + 0.3 + 1.6 + 1.8 = 3.7 \end{aligned}$$

c)

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 3.7 - (1.7)^2 = 3.7 - 2.89 = 0.81$$

d)

$$E(W) = E(3Y - 2) = 3E(Y) - 2 = 3 \times 1.7 - 2 = 5.1 - 2 = 3.1$$

$$\text{Var}(W) = \text{Var}(3Y - 2) = 9\text{Var}(Y) = 9 \times 0.81 = 7.29$$

14. Soluzione:

a) Distribuzioni marginali:

$$P(X = 0) = 0.1 + 0.2 + 0.1 = 0.4$$

$$P(X = 1) = 0.2 + 0.1 + 0.3 = 0.6$$

$$P(Y = 1) = 0.1 + 0.2 = 0.3$$

$$P(Y = 2) = 0.2 + 0.1 = 0.3$$

$$P(Y = 3) = 0.1 + 0.3 = 0.4$$

b)

$$E(X) = 0 \times 0.4 + 1 \times 0.6 = 0.6$$

$$E(Y) = 1 \times 0.3 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.4 = 0.3 + 0.6 + 1.2 = 2.1$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= 0 \times 1 \times 0.1 + 0 \times 2 \times 0.2 + 0 \times 3 \times 0.1 \\ &\quad + 1 \times 1 \times 0.2 + 1 \times 2 \times 0.1 + 1 \times 3 \times 0.3 \\ &= 0 + 0 + 0 + 0.2 + 0.2 + 0.9 = 1.3 \end{aligned}$$

c)

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1.3 - 0.6 \times 2.1 = 1.3 - 1.26 = 0.04$$

d) Per verificare l'indipendenza: $P(X = 0, Y = 1) = 0.1$ ma $P(X = 0)P(Y = 1) = 0.4 \times 0.3 = 0.12$. Poiché $0.1 \neq 0.12$, X e Y **NON sono indipendenti**.

15. Soluzione: $X \sim N(\mu = 165, \sigma = 6)$

a)

$$Z = \frac{170 - 165}{6} = \frac{5}{6} \approx 0.833$$

$$P(X > 170) = P(Z > 0.833) \approx 1 - 0.7967 = 0.2033$$

b)

$$Z_1 = \frac{160 - 165}{6} = -0.833, \quad Z_2 = \frac{170 - 165}{6} = 0.833$$

$$P(160 < X < 170) = \Phi(0.833) - \Phi(-0.833) \approx 0.7967 - 0.2033 = 0.5934$$

c)

$$Z = \frac{175 - 165}{6} = \frac{10}{6} \approx 1.667$$

$$P(X > 175) \approx 1 - 0.9522 = 0.0478$$

$$\text{Numero atteso} = 100 \times 0.0478 \approx 4.78 \approx 5 \text{ donne}$$

Esercizi difficili

(Bayes con test multipli) Una malattia rara colpisce lo 0.5% della popolazione. Sono disponibili due test diagnostici indipendenti. Il primo test ha sensibilità 98% e specificità 95%. Il secondo test ha sensibilità 99% e specificità 92%.

- Se una persona risulta positiva a entrambi i test, qual è la probabilità che sia effettivamente malata?
- Se una persona risulta positiva al primo test ma negativa al secondo, qual è la probabilità che sia malata?

(Combinazioni di variabili normali) Siano $X \sim N(100, 225)$ e $Y \sim N(80, 144)$ due variabili aleatorie indipendenti (le varianze sono rispettivamente 225 e 144).

- Determinare la distribuzione di $Z = 2X - 3Y + 50$.
- Calcolare $P(X > Y + 30)$.
- Se $W = \frac{X+Y}{2}$, calcolare $P(85 < W < 95)$.

(Bayes con informazione parziale) In una fabbrica operano tre turni: mattina (40% della produzione), pomeriggio (35%) e notte (25%). I tassi di difettosità sono rispettivamente 2%, 3% e 5%. Un ispettore trova 2 pezzi difettosi su un campione casuale di 50 pezzi.

- Assumendo che i 2 pezzi difettosi siano indipendenti, quale turno è più probabilmente responsabile?
- Calcolare le probabilità a posteriori per ciascun turno.

(Distribuzione congiunta) Due variabili aleatorie X e Y hanno distribuzione congiunta:

$X \backslash Y$	0	1	2	3
-1	0.05	0.10	0.05	0.05
0	0.10	0.15	0.10	0.05
1	0.05	0.10	0.15	0.05

- Calcolare $E(X|Y = 2)$ e $\text{Var}(X|Y = 2)$.
- Calcolare $\text{Cov}(X, Y)$ e il coefficiente di correlazione ρ_{XY} .
- Sia $Z = X^2 + Y$. Calcolare $E(Z)$.
- Verificare se $E(XY|Y = 1) = E(X|Y = 1) \cdot 1$.

(Binomiale e probabilità condizionata) Un'azienda produce lotti di 100 componenti. La probabilità che un componente sia difettoso è 0.03. Un lotto viene accettato se, su un campione casuale di 10 componenti, al massimo 1 è difettoso.

- Qual è la probabilità che un lotto venga accettato?
- Sapendo che un lotto è stato accettato, qual è la probabilità che contenesse esattamente 1 componente difettoso nel campione?
- Se in un lotto ci sono effettivamente 5 componenti difettosi su 100, qual è la probabilità che venga accettato? (Suggerimento: usare la distribuzione ipergeometrica)

Soluzioni degli Esercizi Difficili

1. **Soluzione:** Sia M = malato, T_1^+ = primo test positivo, T_2^+ = secondo test positivo.

Dati: $P(M) = 0.005$, $P(T_1^+|M) = 0.98$, $P(T_1^-|M^c) = 0.95 \Rightarrow P(T_1^+|M^c) = 0.05$

$P(T_2^+|M) = 0.99$, $P(T_2^-|M^c) = 0.92 \Rightarrow P(T_2^+|M^c) = 0.08$

a) Poiché i test sono indipendenti:

$$P(T_1^+ \cap T_2^+|M) = 0.98 \times 0.99 = 0.9702$$

$$P(T_1^+ \cap T_2^+|M^c) = 0.05 \times 0.08 = 0.004$$

$$P(T_1^+ \cap T_2^+) = 0.9702 \times 0.005 + 0.004 \times 0.995 = 0.004851 + 0.00398 = 0.008831$$

$$P(M|T_1^+ \cap T_2^+) = \frac{0.9702 \times 0.005}{0.008831} = \frac{0.004851}{0.008831} \approx 0.549$$

b) $P(T_1^+ \cap T_2^-|M) = 0.98 \times 0.01 = 0.0098$

$$P(T_1^+ \cap T_2^-|M^c) = 0.05 \times 0.92 = 0.046$$

$$P(T_1^+ \cap T_2^-) = 0.0098 \times 0.005 + 0.046 \times 0.995 = 0.000049 + 0.04577 = 0.045819$$

$$P(M|T_1^+ \cap T_2^-) = \frac{0.000049}{0.045819} \approx 0.00107$$

2. **Soluzione:** $X \sim N(100, 225)$ quindi $\sigma_X = 15$; $Y \sim N(80, 144)$ quindi $\sigma_Y = 12$

a) Per trasformazioni lineari di variabili normali indipendenti:

$$E(Z) = 2E(X) - 3E(Y) + 50 = 2(100) - 3(80) + 50 = 200 - 240 + 50 = 10$$

$$\text{Var}(Z) = 4\text{Var}(X) + 9\text{Var}(Y) = 4(225) + 9(144) = 900 + 1296 = 2196$$

$$\sigma_Z = \sqrt{2196} \approx 46.86$$

Quindi $Z \sim N(10, 2196)$

b) $P(X > Y + 30) = P(X - Y > 30)$. Sia $D = X - Y$:

$$E(D) = E(X) - E(Y) = 100 - 80 = 20$$

$$\text{Var}(D) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) = 225 + 144 = 369$$

$$\sigma_D = \sqrt{369} \approx 19.21$$

$D \sim N(20, 369)$. Quindi:

$$Z = \frac{30 - 20}{19.21} \approx 0.521$$

$$P(D > 30) = P(Z > 0.521) \approx 1 - 0.6985 = 0.3015$$

c) $W = \frac{X+Y}{2}$:

$$E(W) = \frac{E(X) + E(Y)}{2} = \frac{100 + 80}{2} = 90$$

$$\text{Var}(W) = \frac{\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)}{4} = \frac{225 + 144}{4} = \frac{369}{4} = 92.25$$

$$\sigma_W = \sqrt{92.25} = 9.605$$

$W \sim N(90, 92.25)$:

$$Z_1 = \frac{85 - 90}{9.605} \approx -0.521, \quad Z_2 = \frac{95 - 90}{9.605} \approx 0.521$$

$$P(85 < W < 95) = \Phi(0.521) - \Phi(-0.521) \approx 0.6985 - 0.3015 = 0.397$$

3. **Soluzione:** Sia M = mattina, P = pomeriggio, N = notte, D = pezzo difettoso.

a) La probabilità di trovare esattamente 2 difettosi su 50 segue approssimativamente una binomiale con $n = 50$ e p che dipende dal turno.

Per il turno mattina: $p_M = 0.02$, quindi:

$$P(X = 2|M) = \binom{50}{2} (0.02)^2 (0.98)^{48} \approx 1225 \times 0.0004 \times 0.379 \approx 0.186$$

Per il pomeriggio: $p_P = 0.03$:

$$P(X = 2|P) = \binom{50}{2} (0.03)^2 (0.97)^{48} \approx 1225 \times 0.0009 \times 0.237 \approx 0.261$$

Per la notte: $p_N = 0.05$:

$$P(X = 2|N) = \binom{50}{2} (0.05)^2 (0.95)^{48} \approx 1225 \times 0.0025 \times 0.0874 \approx 0.268$$

b) Per Bayes:

$$P(X = 2) = 0.186 \times 0.4 + 0.261 \times 0.35 + 0.268 \times 0.25 = 0.0744 + 0.09135 + 0.067 = 0.233$$

$$P(M|X = 2) = \frac{0.186 \times 0.4}{0.233} \approx 0.319$$

$$P(P|X = 2) = \frac{0.261 \times 0.35}{0.233} \approx 0.392$$

$$P(N|X = 2) = \frac{0.268 \times 0.25}{0.233} \approx 0.288$$

Il turno pomeridiano è più probabilmente responsabile.

4. **Soluzione:**

a) Distribuzione condizionata di X dato $Y = 2$:

$$P(Y = 2) = 0.05 + 0.10 + 0.15 = 0.30$$

$$P(X = -1|Y = 2) = \frac{0.05}{0.30} = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 0|Y = 2) = \frac{0.10}{0.30} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 1|Y = 2) = \frac{0.15}{0.30} = \frac{1}{2}$$

$$E(X|Y = 2) = -1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$$E(X^2|Y = 2) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Var}(X|Y = 2) = \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

b) Distribuzioni marginali:

$$P(X = -1) = 0.25, \quad P(X = 0) = 0.40, \quad P(X = 1) = 0.35$$

$$P(Y = 0) = 0.20, \quad P(Y = 1) = 0.35, \quad P(Y = 2) = 0.30, \quad P(Y = 3) = 0.15$$

$$E(X) = -1(0.25) + 0(0.40) + 1(0.35) = 0.10$$

$$E(Y) = 0(0.20) + 1(0.35) + 2(0.30) + 3(0.15) = 1.40$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum x_i y_j P(X = x_i, Y = y_j) \\ &= 0 + (-1)(1)(0.10) + (-1)(2)(0.05) + (-1)(3)(0.05) \\ &\quad + 0 + 0 + 0 + 0 \\ &\quad + (1)(1)(0.10) + (1)(2)(0.15) + (1)(3)(0.05) \\ &= -0.10 - 0.10 - 0.15 + 0.10 + 0.30 + 0.15 = 0.20 \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = 0.20 - (0.10)(1.40) = 0.20 - 0.14 = 0.06$$

Per calcolare ρ_{XY} :

$$E(X^2) = 1(0.25) + 0(0.40) + 1(0.35) = 0.60$$

$$\text{Var}(X) = 0.60 - (0.10)^2 = 0.59$$

$$E(Y^2) = 0(0.20) + 1(0.35) + 4(0.30) + 9(0.15) = 2.90$$

$$\text{Var}(Y) = 2.90 - (1.40)^2 = 0.94$$

$$\rho_{XY} = \frac{0.06}{\sqrt{0.59 \times 0.94}} = \frac{0.06}{\sqrt{0.5546}} \approx \frac{0.06}{0.745} \approx 0.081$$

c) $E(Z) = E(X^2 + Y) = E(X^2) + E(Y) = 0.60 + 1.40 = 2.00$

- d) $E(X|Y = 1) = -1 \cdot \frac{0.10}{0.35} + 0 \cdot \frac{0.15}{0.35} + 1 \cdot \frac{0.10}{0.35} = 0$
 $E(XY|Y = 1) = E(X \cdot 1|Y = 1) = 1 \cdot E(X|Y = 1) = 0$
 Quindi sì, la relazione è verificata.

5. Soluzione:

- a) Sia X il numero di difettosi nel campione di 10. $X \sim \text{Bin}(10, 0.03)$.

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ P(X = 0) &= (0.97)^{10} \approx 0.7374 \\ P(X = 1) &= 10(0.03)(0.97)^9 \approx 0.2281 \\ P(X \leq 1) &\approx 0.9655 \end{aligned}$$

- b) Dato che il lotto è accettato:

$$P(X = 1|X \leq 1) = \frac{P(X = 1)}{P(X \leq 1)} = \frac{0.2281}{0.9655} \approx 0.236$$

- c) Con 5 difettosi su 100, campionando 10 senza reinserimento (ipergeometrica):

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ P(X = 0) &= \frac{\binom{5}{0} \binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} = \frac{\binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} \approx 0.5838 \\ P(X = 1) &= \frac{\binom{5}{1} \binom{95}{9}}{\binom{100}{10}} \approx 0.3394 \\ P(X \leq 1) &\approx 0.9232 \end{aligned}$$