

Esercizio

Due impianti producono lo stesso oggetto (indipendentemente); il primo macchinario presenta un tasso di difettosità del 8%, il secondo del 6%.

Calcolare la probabilità, prendendo un oggetto da ciascuno degli impianti, che:

- Entrambi gli oggetti siano non difettosi.
- Vi sia un solo prodotto non difettoso.
- Almeno uno dei due oggetti sia difettoso.

a)

$$0.92 * 0.94 = 0.8648$$

b)

$$0.08 * .94 + .06 * .92 \\ = 0.1304$$

c)

$$1 - 0.8648 = 0.1352$$

Esercizio

Una compagnia di assicurazioni ritiene che gli assicurati possano essere suddivisi in due classi: *a rischio* di incidente e *non a rischio* di incidente. Le loro statistiche mostrano che una persona classificata come “*a rischio*” avrà un incidente automobilistico entro un anno dalla stipula del contratto con probabilità 0.3, mentre tale probabilità è pari a 0.1 per le persone *non a rischio*.

- a) Supponiamo che il 40 % delle persone sia a rischio, qual è la probabilità che un nuovo assicurato abbia un incidente nel primo anno di polizza?
- b) Supponiamo che un nuovo assicurato abbia un incidente entro un anno dalla prima stipulazione della polizza. Qual è la probabilità che sia effettivamente un soggetto classificato come “*a rischio*”?

R=«A Rischio»

R^C =«NON a Rischio»

A=«incidente»

$$P(R)=0.40$$

$$P(R^C)=0.60$$

$$P(A|R)=0.30$$

$$P(A|R^C)=0.1$$

$$P(A)=P(A|R)P(R) + P(A|R^C)P(R^C)$$

$$P(A)=0.30 \times 0.40 + 0.1 \times 0.60 = 0.18$$

$$P(R|A) = \frac{P(A|R)P(R)}{P(A)}$$

$$P(R|A)=0.40 \times 0.30 / 0.18 = 0.667$$

Tabular Approach

events	Prior Probabilities	Conditional probabilities	Joint probabilities	Posterior probabilities
R_i	$P(R_i)$	$P(A R_i)$	$P(R_i \cap A)$	$P(A_i B)$
R	0.40	0.30	0.12	0.667
R^C	0.60	0.10	0.06	0.333
<i>sum</i>	1		$P(A)=0.18$	1

Tabular Approach

events	Prior Probabilities	Conditional probabilities	Joint probabilities	Posterior probabilities
R_i	$P(R_i)$	$P(A R_i)$	$P(R_i \cap A)$	$P(A_i B)$
R	0.40	0.30		
R^C	0.60	0.10		
<i>sum</i>	1			

Tabular Approach

events R_i	Prior Probabilities $P(R_i)$	Conditional probabilities $P(A R_i)$	Joint probabilities $P(R_i \cap A)$	Posterior probabilities $P(A_i B)$
R	0.40	0.30	0.12	
R^C	0.60	0.10	0.06	
<i>sum</i>	1			

Tabular Approach

events	Prior Probabilities	Conditional probabilities	Joint probabilities	Posterior probabilities
R_i	$P(R_i)$	$P(A R_i)$	$P(R_i \cap A)$	$P(A_i B)$
R	0.40	0.30	0.12	
R^C	0.60	0.10	0.06	
<i>sum</i>	1		$P(A)=0.18$	

Tabular Approach

events	Prior Probabilities	Conditional probabilities	Joint probabilities	Posterior probabilities
R_i	$P(R_i)$	$P(A R_i)$	$P(R_i \cap A)$	$P(A_i B)$
R	0.40	0.30	0.12	0.667
R^C	0.60	0.10	0.06	0.333
<i>sum</i>	1		$P(A)=0.18$	1

Esercizio

Mario ha calcolato che la durata del tragitto quotidiano per raggiungere l'università da casa sua è ben descritto da una variabile casuale Gaussiana con media 40 minuti e varianza 49 min^2 .

- Qual è la probabilità che oggi Mario impieghi tra 39 e 50 minuti per raggiungere l'università?

Considerando inoltre che la durata quotidiana del viaggio è indipendente da quella degli altri giorni,

- qual è la probabilità che in 7 giorni consecutivi la durata media del suo viaggio sia compresa fra 39 e 50 minuti?
- Qual è la probabilità per due giorni consecutivi Mario impieghi tra 39 e 50 minuti per raggiungere l'università?

$$\begin{aligned}
 P(39 < X \leq 50) &= P(X \leq 50) - P(X \leq 39) = P\left(Z \leq \frac{50 - 40}{7}\right) - P\left(Z \leq \frac{39 - 40}{7}\right) = P(Z \leq 1.43) - P(Z \leq -0.14) = \\
 &= 0.9236 - 0.4433 = 0.4803
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(39 < \bar{X} \leq 50) &= P(\bar{X} \leq 50) - P(\bar{X} \leq 39) = P\left(Z \leq \frac{50 - 40}{7/\sqrt{7}}\right) - P\left(Z \leq \frac{39 - 40}{7/\sqrt{7}}\right) = \\
 &= P(Z \leq 3.77) - P(Z \leq -0.38) = \\
 &= 1 - 0.3519 = 0.6480
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(39 < X_1 \leq 50 \cap 39 < X_2 \leq 50) &= P(39 < X_1 \leq 50) \times P(39 < X_2 \leq 50) \\
 &= 0.4803 \times 0.4803 = 0.2307
 \end{aligned}$$

Il tempo necessario per percorrere il percorso casa-ufficio è una variabile aleatoria di legge normale. Se il tempo medio è di 40 minuti e la probabilità di impiegarci più di un'ora è 5%, quanto vale la probabilità di coprire il percorso in più di 50 minuti? **(2 punti)**

Il tempo necessario per percorrere il percorso casa-ufficio è una variabile aleatoria di legge normale. Se il tempo medio è di 40 minuti e la probabilità di impiegarci più di un'ora è 5%, quanto vale la probabilità di coprire il percorso in più di 50 minuti? **(2 punti)**

$$\text{Prob}(X > 60) = 0.05$$

$$(60 - 40) / \sigma = 1.64$$

$$\sigma = 20 / 1.64 = 12.19$$

$$\text{Prob}(X > 50) = \text{prob}(X > (50 - 40) / 12.19)$$

$$\text{Prob}(X > 50) = P(Z > 0.82) = 0.20$$

Esercizio

Il tempo di percorrenza da casa al lavoro del Signor XXX si distribuisce come una Gaussiana di media μ 20 minuti e deviazione standard di 10 minuti.

- Supponendo che il Signor XXX esce di casa solitamente alle 8.00 per arrivare al lavoro alle 8.30
- Qual è la probabilità che oggi il Signor XXX arriverà in ritardo al lavoro?
- Qual è la probabilità che il Signor XXX arriverà in ritardo al lavoro sia oggi sia domani?
- Qual è la probabilità che in una settimana con 5 giorni lavorativi il Signor XXX arriverà in ritardo esattamente due volte?
- Quanti giorni vi aspettate che arriverà in ritardo al lavoro il Signor XXX in un anno (considerando 240 giorni lavorativi)?

Soluzioni

- $P(X > 30) = p((X - 20)/10 > (30 - 20)/10) =$
 $= P(Z > 1) = 0.1587$
- $P(X > 25) = p((X - 20)/10 > (25 - 20)/10) =$
 $= P(Z > 0.5) = 0.3085$
- $\text{Binomiale}(n=5, k=0; p=(1-0.1587)) =$
 $= 0.8413^5 = 0.4215$

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} 0.1587^2 (1 - 0.1587)^3 =$$

$$= 0.15$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3!} = 10$$

Variabile Aleatoria Doppia

Esperimento: Lancio di due dadi

X “differenza in valore assoluto tra le facce mostrate”

Y “ numero di facce pari”



Ω	X	Y
$\{1,1\}$	0	0
$\{1,2\}$	1	1
$\{1,3\}$	2	0
....	...	...
$\{2,1\}$	1	1
$\{2,2\}$	0	2
...	...	...
$\{6,5\}$	1	1
$\{6,6\}$	0	2



		Y		
		0	1	2
X	0	3/36	0	3/36
	1	0	10/36	0
	2	4/36	0	4/36
	3	0	6/36	0
	4	2/36	0	2/36
	5	0	2/36	0



Esempio Variabile Aleatoria Doppia

		Y		
		0	1	2
X	0	0.2	0.1	0
	1	0	0.05	0.05
	2	0.1	0.2	0.3

Calcola $E(X)$, $E(Y)$, $E(X|Y=0)$, $\text{Var}(Y|X=2)$

Sono X e Y variabili aleatorie indipendenti?

		Y			
		0	1	2	
X	0	0.2	0.1	0	
	1	0	0.05	0.05	
	2	0.1	0.2	0.3	

$E(X)=$

$E(Y)=$

		Y			
		0	1	2	
X	0	0.2	0.1	0	
	1	0	0.05	0.05	
	2	0.1	0.2	0.3	
		0.4			

$$E(X|Y=0)=$$

		Y			
		0	1	2	
X	0	0.2	0.1	0	
	1	0	0.05	0.05	
	2	0.1	0.2	0.3	0.6

$\text{Var}(Y|X=2) =$

Esercizio 1

Per raggiungere Tor Vergata dalla stazione termini è necessario prendere la metropolitana per 15 fermate e un autobus numero 20 per 6 fermate .

- Il tempo di attesa della metropolitana è distribuito come una Gaussiana di valore atteso 5 minuti e deviazione standard 1 minuti,
- mentre l'autobus numero 20 è più raro e ha un tempo di attesa medio di 6 minuti con 2 minuti di deviazione standard.
- Il tempo del percorso in metropolitana è Gaussiano con media 30 minuti e 10 minuti deviazione standard,
- l'autobus 20 è meno influenzato dal traffico e ha un tempo di percorrenza medio di 15 minuti e 3 minuti di deviazione standard.

Esercizio 1

- Qual è la probabilità di impiegare più di un'ora per raggiungere Tor Vergata?

Se il treno a Termini arriva con 10 minuti di ritardo,

- qual è la probabilità di arrivare comunque in orario a Tor Vergata?

Soluzione 1

X_1 =tempo attesa metro

X_2 = percorso metro

X_3 =tempo attesa autobus 20

X_4 =percorso 20

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = \\ &= 5 + 30 + 6 + 15 = 56 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \text{Var}(X_3) + \text{Var}(X_4) \\ &= 1 + 100 + 4 + 9 = 114 \end{aligned}$$

Soluzione 1

$$P(X \geq 60) = P\left(\frac{X - 56}{\sqrt{114}} \geq \frac{60 - 56}{\sqrt{114}}\right) = P(Z \geq 0.37) = 0.3556$$

$$P(X \leq 46) = P\left(\frac{X - 56}{\sqrt{114}} \leq \frac{46 - 56}{\sqrt{114}}\right) = P(Z \leq -0.9366) = 0.1744$$

Esercizio

Quando uno studente parla con la segreteria didattica generalmente ci mette un periodo di tempo distribuito X come una Gaussiana di media $\mu=9$ minuti e $\sigma=2$ minuti.

Immaginate di aspettare in fila il vostro turno e avere 25 persone davanti a voi,

- Qual è il tempo previsto di attesa?
- Qual è la probabilità che lo studente prima di voi ci metta meno di 5 minuti?
- Qual è la probabilità di dover aspettare complessivamente più di 3 ore?

Esercizio 2

Sia X ="tempo passato in segreteria"

$$X \sim N(9, \sigma=2)$$

$X_1, X_2, \dots, X_{25}$ simple random sample of independent random variables identically distributed as

$$P(X < 5) = P\left(Z < \frac{5-9}{2}\right) = P(Z < -2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{25} X_i$$

$$\sum_{i=1}^{25} X_i \sim N(225, \sigma_{\bar{X}} = 5 * 2 = 10)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{25} X_i > 180\right) = P\left(Z > \frac{180 - 225}{10}\right) = P(Z > -4,5) \approx 1$$

$$P(Z < 4,5) \approx 1$$

Esercizio 3

Il tempo necessario per percorrere il percorso casa-ufficio è una variabile aleatoria di legge normale. Se il tempo medio è di 40 minuti e la probabilità di impiegarci più di un'ora è 5%, quanto vale la probabilità di coprire il percorso in più di 50 minuti?

$$\text{Prob}(X > 60) = 0.05$$

$$(60 - 40) / \sigma = 1.64$$

$$\sigma = 20 / 1.64 = 12.19$$

$$\text{Prob}(X > 50) = \text{prob}(X > (50 - 40) / 12.19)$$

$$\text{Prob}(X > 50) = P(Z > 0.82) = 0.20$$