

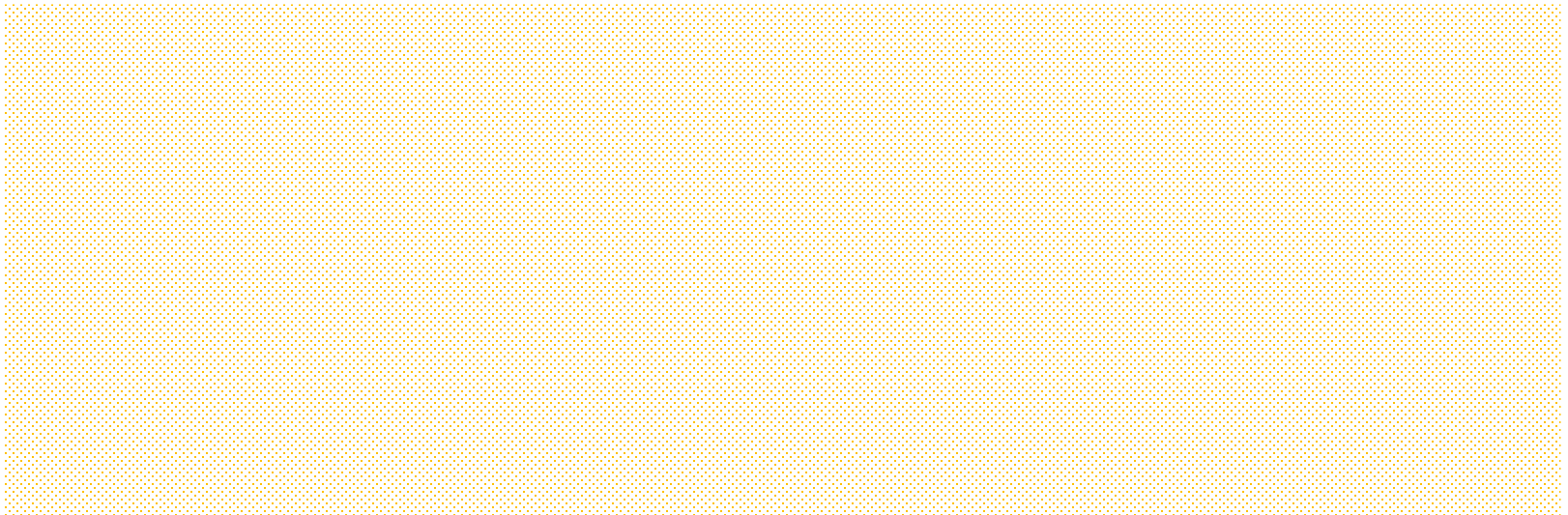
Esercitazione

13 Novembre 2025

Maura Mezzetti

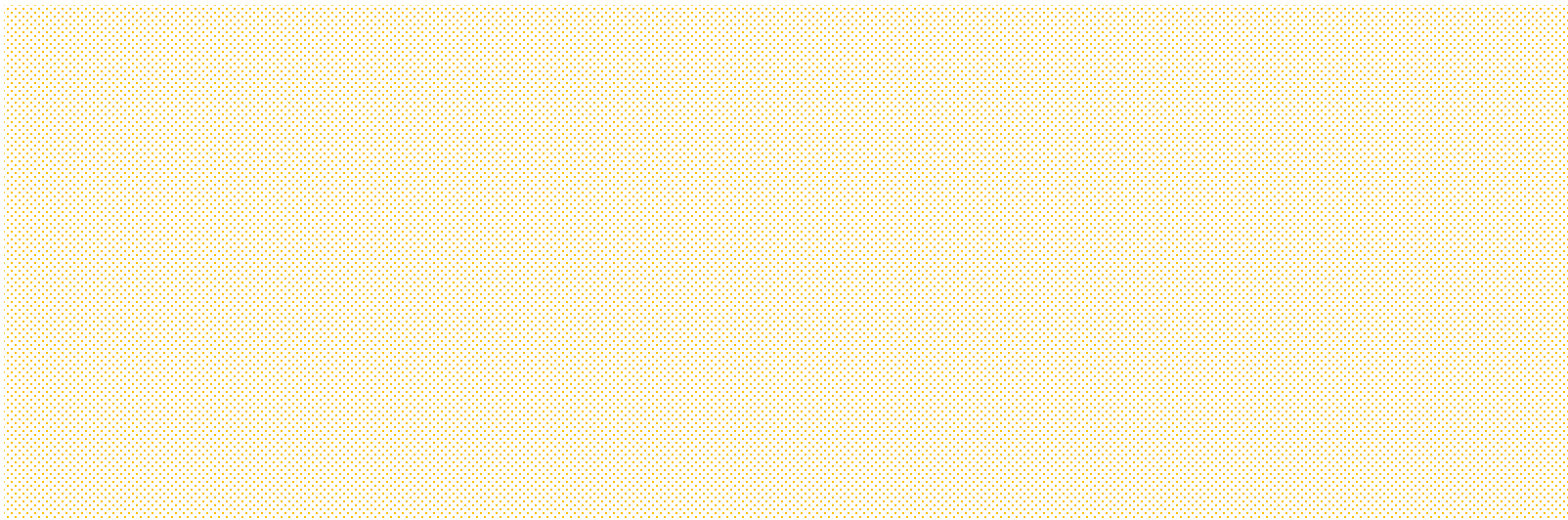
Esercizio 1

La probabilità che uno studente laureato si sia laureato in corso è pari al 70%. Viene selezionato casualmente uno studente che si è già laureato. Se indichiamo con X la variabile che assume il valore 1 se lo studente si è laureato in corso, e 0 altrimenti, che distribuzione ha tale variabile casuale?



Esercizio 1

Vengono estratti casualmente 6 studenti. Qual è la probabilità che al massimo 5 di questi studenti si siano laureati in corso?



Esercizio 2

Il numero di chilometri X che un'utilitaria riesce a percorrere con un litro di benzina si distribuisce secondo una Normale con valore medio pari a 27 e scarto quadratico medio pari a 3.

Calcolare:

- a) la probabilità che l'utilitaria percorra più di 30 chilometri con un litro di carburante
- b) la probabilità che 4 utilitarie percorrano in media più di 30 chilometri con un litro di carburante.

$$\begin{array}{l|l} P(X \geq 30) & X_1, X_2, X_3, X_4 \\ P(Z \geq \frac{30-27}{3}) & P(\bar{X} \geq 30) \\ P(t \geq 1) = 0.1587 & \bar{X} \sim N(27, \frac{9}{4}) \end{array}$$

Esercizio 2

a) la probabilità che 4 utilitarie percorrano in media più di 30

$$x_1, x_2, x_3, x_4$$
$$P(\bar{X} \geq 30)$$

$$\bar{X} \sim N(27, \frac{9}{4})$$

$$P\left(Z \geq \frac{30 - 27}{\sqrt{\frac{9}{4}}}\right) = P(Z \geq 2)$$

0.0228

Esercizio 3

Siano $X_1, \dots, X_{144}$ variabili aleatorie iid con legge bernoulliana di parametro 0.4. Se

$$Y = \sum_{i=1}^{144} X_i$$

si fornisca una valutazione approssimata di $P(Y \leq 60)$.

$$Y \approx N(0.4 \times 144, 0.4 \cdot 0.6 \cdot 144)$$

Esercizio 3

$$Y = \sum_{i=1}^{144} X_i$$

si fornisca una valutazione approssimata di $P(Y \leq 60)$.

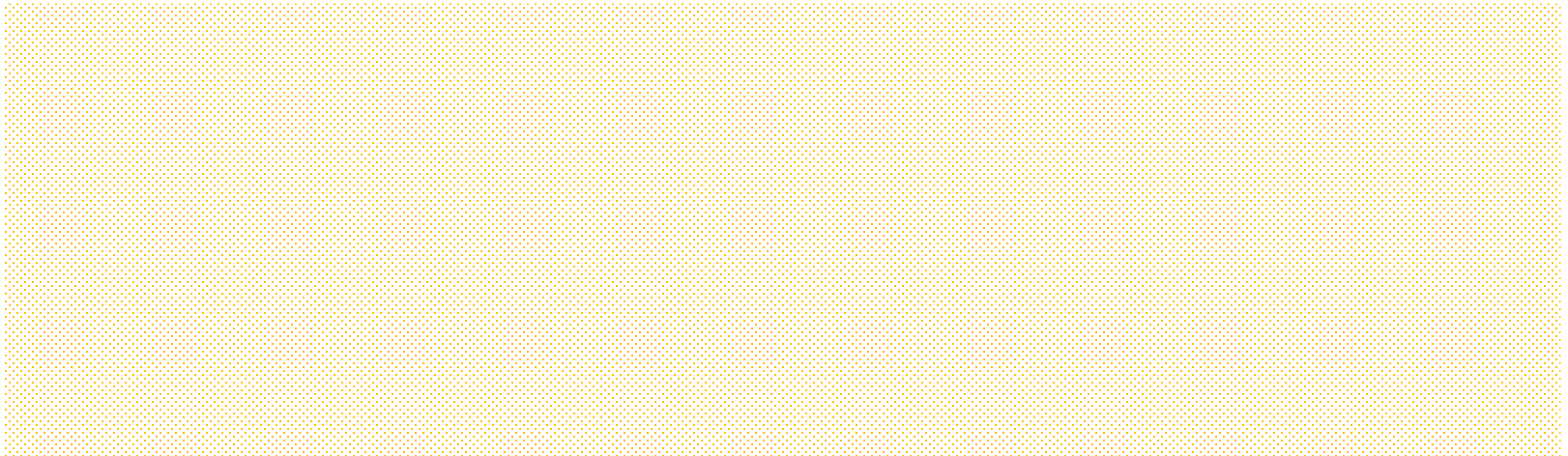
$$P(Y \leq 60) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{144} X_i - 144 \times 0.4}{\sqrt{144 \times 0.4 \times 0.6}} \leq \frac{60 - 144 \times 0.4}{\sqrt{144 \times 0.4 \times 0.6}}\right) =$$
$$P(Z \leq 0.408) = 0.6584$$

Esercizio 4

Siano $X_1, X_2, \dots, X_n$ variabili aleatorie indipendenti estratte da una popolazione con $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2$.

Dimostrare che il seguente stimatore T è uno stimatore corretto e consistente della media della popolazione

$$T = \frac{1}{n} \sum X_i$$



Esercizio 5

Sia X una v.a. con valore atteso μ e varianza σ^2 e sia (X_1, X_2, X_3, X_4) un campione casuale semplice distribuito come X .

Il seguente stimatore è uno stimatore corretto per μ ?

Valutarne inoltre l'errore quadratico medio.

$$T(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1 - \frac{1}{2}X_2 - X_3 + \frac{5X_4}{4}$$

$$E(T) = E(X_1) - \frac{1}{2}E(X_2) - E(X_3) + \frac{5}{4}E(X_4)$$

$$\cancel{\mu} - \frac{1}{2}\mu - \cancel{\mu} + \frac{5}{4}\mu = \frac{3}{4}\mu$$

T NON è uno stimatore
corretto per μ

$$T(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1 - \frac{1}{2}X_2 - X_3 + \frac{5X_4}{4}$$

$$\text{Var}(T) = \text{Var}X_1 + \frac{1}{4}\text{Var}(X_2) + \text{Var}X_3 + \frac{25}{16}\overset{\text{Var}X_4}{\text{Var}X_4}$$

$$= \sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^2 + \sigma^2 + \frac{25}{16}\sigma^2 = \frac{61}{16}\sigma^2$$

$$T(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1 - \frac{1}{2}X_2 - X_3 + \frac{5X_4}{4}$$

$$EQM(T) = \frac{61}{16} \sigma^2 + \frac{1}{16} \mu^2$$

$$B(T) = E(T) - \mu = \frac{3}{4} \mu - \mu = -\frac{\mu}{4}$$

Esercizio 6

Consideriamo la variabile casuale che rappresenta il numero di ore trascorse in media ogni giorno davanti al computer da un adolescente. Viene svolta un'indagine in cui viene estratto casualmente un campione di 20 adolescenti, le ore dichiarate sono sintetizzate nella seguente distribuzione di frequenza:

x_j^*	n_j
0	5
1	3
2	3
3	1
4	4
5	2
8	2

x_j^*	n_j	$x_j^* \cdot n_j$	x_j^{2*}	$x_j^{2*} \cdot x \cdot n_j$
0	5	0	0	0
1	3	3	1	3
2	3	6	4	12
3	1	3	9	9
4	4	16	16	64
5	2	10	25	50
8	2	16	64	128
	20	54		266
		2.7		13.3
				6.01
				6.3263

Stimare la media delle ore trascorse davanti alla computer nella popolazione usando uno stimatore corretto

$\bar{x}$

$$\bar{x} = 2.7$$

Lo stimatore usato al punto precedente è uno stimatore consistente della media della popolazione delle ore trascorse al computer?

Si

Stimare la varianza delle ore trascorse davanti alla computer nella popolazione usando uno stimatore non distorto

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$$

6.3263

Calcolare un intervallo di confidenza per la media delle ore trascorse davanti al computer nella popolazione, utilizzando un livello di confidenza del 99%

$$\left(\bar{x}_n - t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x}_n + t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

$$t_{\frac{\alpha}{2}}^{n-1} = 2.861$$
$$2.7 \pm 2.861 \cdot \sqrt{\frac{6.363}{20}}$$

$$(1.401, 4.307)$$

Come viene modificato l'intervallo precedente diminuendo il livello di confidenza al 95%

si restringe

ESAME

18 Dicembre 2019

COMPITO A

Cognome	Nome
Numero di matricola	

- 1) Approssimare tutti i calcoli alla quarta cifra decimale.
- 2) Ai fini della valutazione si terrà conto solo ed esclusivamente di quanto riportato negli appositi spazi.
- 3) Al termine della prova, è **OBBLIGATORIO** consegnare il presente foglio ed il foglio di brutta (**DI CUI NON SI TERRÀ CONTO AI FINI DELLA VALUTAZIONE**).
- 4) Consegnare dopo 90 minuti

Fornire la definizione di stimatore non distorto.
Indicare inoltre un esempio di stimatore non distorto.

$$B(T) = 0$$
$$E(T) = \theta$$

$\bar{X}$ non distorto
 $\mu = E(X)$

Enunciare il teorema del limite centrale

X arbitraria
 $E(X) = \mu$ $Var(X) = \sigma^2$

$n \rightarrow \infty$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Si indichi se le seguenti affermazioni sono Vere o False

Affermazione	Vero / Falsa?
Al crescere di n , la distribuzione Binomiale si può approssimare con una distribuzione Gaussiana	✓
La varianza è sempre maggiore della deviazione standard	F

Esercizio 7

La distribuzione della lunghezza di barrette di acciaio prodotti in serie è normale con media pari a 4 cm e varianza uguale a 0.04cm^2 . Il 49° centile della distribuzione della lunghezza della lampadina è:

3.812 cm	☐	
4.2 cm	☐	
4.625 cm	☐	
3.995 cm	☒	
4.375 cm	☐	

Esercizio 8

Viene effettuato un sondaggio per prevedere quale fra due candidati alla carica di sindaco di una città vincerà il ballottaggio. Indichiamo con A e B i due candidati. Vengono fatte 200 interviste, nelle quali all'intervistato viene chiesto di esprimere la propria preferenza; il candidato B riceve 105 preferenze.

- a) Stimare la probabilità che delle preferenze ottenute dal candidato B diventi sindaco, giustificando la scelta dello stimatore usato.
- b) Calcolare l'intervallo di confidenza al 90% per la probabilità che il candidato B diventi sindaco

Viene effettuato un sondaggio per prevedere quale fra due candidati alla carica di sindaco di una città vincerà il ballottaggio. Indichiamo con A e B i due candidati. Vengono fatte 200 interviste, nelle quali all'intervistato viene chiesto di esprimere la propria preferenza; il candidato B riceve 105 preferenze.

a) Stimare la probabilità che il candidato B diventi sindaco, giustificando la scelta dello stimatore usato.

b) Calcolare l'intervallo di confidenza al 90% per la probabilità che il candidato B diventi sindaco

a)

$$\hat{p}$$

$$\hat{p} = 0.525$$

b)

$$\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

$$z_{1-\alpha/2} = 1.645$$

$$[0.4669, 0.5831]$$

Esercizio 9

Il proprietario di un bar osserva per 25 giorni il numero di cornetti venduti e ottiene il seguente risultato

$$\sum_{i=1}^{25} x_i = 3000$$

Supponendo che, X , il numero di cornetti venduti giornalmente segua una distribuzione normale $N(\mu, \sigma^2)$ con varianza nota uguale a 100.

Proporre uno stimatore corretto per μ (“numero medio di cornetti venduti quotidianamente”) e valutarne la stima nel campione osservato

Si costruisca un intervallo di confidenza di livello 95% per il numero medio di cornetti venduti quotidianamente

Il proprietario di un bar osserva per 25 giorni il numero di cornetti venduti e ottiene il seguente risultato

$$\sum_{i=1}^{25} x_i = 3000$$

Supponendo che, X , il numero di cornetti venduti giornalmente segua una distribuzione normale $N(\mu, \sigma^2)$ con varianza nota uguale a 100.

Proporre uno stimatore corretto per μ ("numero medio di cornetti venduti quotidianamente") e valutarne la stima nel campione osservato

Si costruisca un intervallo di confidenza di livello 95% per il numero medio di cornetti venduti quotidianamente

Stimatore e Stima per μ

$\bar{X}$

$\bar{x} = 120$

$$\left(\bar{x}_n - z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}_n + z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$z_{0.975} = 1.96$$

$$[116.08, 123.92]$$

95%

Esercizio

Sia p la proporzione di individui che preferiscono il prodotto A ad altri prodotti simili. Intervistati 250 consumatori è emerso che 130 di essi dichiarano di preferire il prodotto A rispetto ad altri prodotti simili.

- a) si costruisca l'intervallo di confidenza per p al livello di confidenza del 95%
- b) si determini la numerosità campionaria affinché la lunghezza dell'intervallo sia inferiore a 0.06

X "preferenze per prodotto A"

X Bernoulli(p)

Stimatore per p ?

Stima per p ?

X Bernoulli(p)

Stimatore per p ?

Proporzione campionaria

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

Stima per p ?

$$\hat{p} = \frac{130}{250} = 0.52$$

Intervallo di confidenza per p proporzione della popolazione

- $X \sim \text{Bernoulli}(p)$
- $E(X)=p$ $\text{Var}(X)=p(1-p)$ n grande

$$\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

$$\hat{p} = 0.52$$

$$z_{1-\alpha/2} = 1.96$$

$$\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0.52 \times 0.48}{250}} = 0.032$$

$$95\%CI = (0.52 - 1.96 \times 0.032; 0.52 + 1.96 \times 0.032)$$

$$95\%CI = (0.46; 0.58)$$

$$\hat{p} = 0.52$$

$$z_{1-\alpha/2} = 1.96$$

$$\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0.52 \times 0.48}{250}} = 0.032$$

$$95\%CI = (0.52 - 1.96 \times 0.032; 0.52 + 1.96 \times 0.032)$$

$$95\%CI = (0.46; 0.58)$$

$$lunghezza = 0.58 - 0.46 = 0.12$$

$$lunghezza = 2 \times z_{1-\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$lunghezza = 2 \times z_{1-\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 0.06$$

$$\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq \frac{0.06}{2 \times z_{1-\alpha/2}}$$

$$\sqrt{n} \geq \frac{2 \times z_{1-\alpha/2}}{0.06} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} = 32.64$$

$$n \geq 1065.37$$

$$n \geq 1066$$