

Esercizio 1

Un laboratorio misura la **stessa temperatura** con **due termometri diversi**, indipendenti.

- Termometro A:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu = 20, \sigma^2 = 0.22)$$

- Termometro B:

$$Y \sim \mathcal{N}(\mu = 20, \sigma^2 = 0.3^2)$$

Vogliamo studiare la **differenza tra le due letture**:

$$D = X - Y$$

Qual è la probabilità che i due termometri differiscano di più di 0.5°C ?

Esercizio 1

Vogliamo studiare la **differenza tra le due letture**:

$$D = X - Y$$

$$D \sim \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 0.2^2 + 0.3^2 = 0.13)$$

Qual è la probabilità che i due termometri differiscano di più di 0.5°C ?

$$P(|D| > 0.5) = P(0 \leq X - Y \leq 0.5) + P(0 \leq Y - X \leq 0.5) = P(-0.5 \leq X - Y \leq 0.5)$$

$$P(|D| > 0.5) = 0.164$$

Esercizio 2

Quando uno studente parla con la segreteria didattica generalmente ci mette un periodo di tempo distribuito X come una Gaussiana di media $\mu=9$ minuti e $\sigma=2$ minuti.

Immaginate di aspettare in fila il vostro turno e avere 25 persone davanti a voi,

- Qual è il tempo previsto di attesa?
- Qual è la probabilità che lo studente prima di voi ci metta meno di 5 minuti?
- Qual è la probabilità di dover aspettare complessivamente più di 3 ore?

Esercizio 2

Sia X ="tempo passato in segreteria"

$$X \sim N(9, \sigma=2)$$

$X_1, X_2, \dots, X_{25}$ simple random sample of independent random variables identically distributed as

$$P(X < 5) = P\left(Z < \frac{5-9}{2}\right) = P(Z < -2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$\sum_{i=1}^{25} X_i$$

$$\sum_{i=1}^{25} X_i \sim N(225, \sigma_{\bar{X}} = 5 * 2 = 10)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{25} X_i > 180\right) = P\left(Z > \frac{180 - 225}{10}\right) = P(Z > -4.5) \approx 1$$
$$P(Z < 4.5) \approx 1$$

Esercizio 3

Mario ha calcolato che la durata del tragitto quotidiano per raggiungere l'università da casa sua è ben descritto da una variabile casuale Gaussiana con media 40 minuti e varianza 49 min^2 .

- Qual è la probabilità che oggi Mario impieghi tra 39 e 50 minuti per raggiungere l'università?

Considerando inoltre che la durata quotidiana del viaggio è indipendente da quella degli altri giorni,

- qual è la probabilità che in 7 giorni consecutivi la durata media del suo viaggio sia compresa fra 39 e 50 minuti?
- Qual è la probabilità per due giorni consecutivi Mario impieghi tra 39 e 50 minuti per raggiungere l'università?

$$\begin{aligned}
 P(39 < X \leq 50) &= P(X \leq 50) - P(X \leq 39) = P\left(Z \leq \frac{50 - 40}{7}\right) - P\left(Z \leq \frac{39 - 40}{7}\right) = P(Z \leq 1.43) - P(Z \leq -0.14) = \\
 &= 0.9236 - 0.4433 = 0.4803
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(39 < \bar{X} \leq 50) &= P(\bar{X} \leq 50) - P(\bar{X} \leq 39) = P\left(Z \leq \frac{50 - 40}{7/\sqrt{7}}\right) - P\left(Z \leq \frac{39 - 40}{7/\sqrt{7}}\right) = \\
 &= P(Z \leq 3.77) - P(Z \leq -0.38) = \\
 &= 1 - 0.3519 = 0.6480
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(39 < X_1 \leq 50 \cap 39 < X_2 \leq 50) &= P(39 < X_1 \leq 50) \times P(39 < X_2 \leq 50) \\
 &= 0.4803 \times 0.4803 = 0.2307
 \end{aligned}$$

z	Seconda cifra decimale di z									
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993

Esercizio 4



La fabbrica **Dolci & Sorrisi** produce pacchetti di caramelle che, per motivi di produzione, non hanno sempre lo stesso peso.

Il peso (in grammi) di ogni pacchetto può essere modellato come una variabile casuale

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu = 200, \sigma^2 = 25)$$

Un negoziante riceve un lotto di **25 pacchetti** e li pesa insieme per verificarne la qualità.

Domande:

Qual è la **media** e la **varianza** del peso totale del lotto??

Qual è la probabilità che il peso totale dei 25 pacchetti superi **5070 g**?

Esercizio 4

$$S_{25} = \sum_{i=1}^{25} X_i$$

$$\sum_{i=1}^{25} X_i$$

$$\sum_{i=1}^{25} X_i \sim N\left(5000, \sigma_{\sum x}^2 = 25 * 25 = 625\right)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{25} X_i > 5070\right) = P\left(Z > \frac{5070-5000}{25}\right) = P(Z > 2.8) = 1-0.9974=0.0026$$

Esercizio 5



Nel laboratorio **Cioccoprezioso**, ogni cioccolatino che esce dalla catena di produzione può essere **difettoso** (riempimento sbagliato) con probabilità $p = 0.3$,

- Un controllore di qualità esamina **4 cioccolatini** scelti a caso dalla produzione del giorno.
- Calcola la probabilità che esattamente 2 siano difettosi (0.2646)

Esercizio 6

- I dipendenti di un'azienda percepiscono un salario medio giornaliero di 110 euro l'ora con una deviazione standard pari a 25 euro. Qual è la probabilità di estrarre un campione casuale di 200 dipendenti e ottenere un salario medio superiore a 115 euro l'ora?
- Supponiamo che un impiegato lavori 5 giorni alla settimana. Qual è la probabilità che il salario complessivo di 25 dipendenti in una settimana sia inferiore a 14000 euro?

$$\bar{X} \approx N\left(110, \frac{25}{\sqrt{200}}\right)$$

$$P\left(\frac{\bar{X} - 110}{1.77} \geq \frac{115 - 110}{1.77}\right) = P(Z \geq 2.83) = 0.003$$

$$\sum X \approx N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

$$\sum X \approx N(5 \times 25 \times 110, 25 \times \sqrt{5 \times 25})$$

$$\sum X \approx N(13750, 279.5085)$$

$$P\left(\frac{\sum X - 13750}{279.5085} \leq \frac{14000 - 13750}{279.5085}\right) = P(Z \leq 0.89) = 0.81$$

Esercizio 7

Un prodotto industriale si ottiene dall'assemblaggio di tre componenti. Il peso complessivo del prodotto Y è ottenuto come somma dei pesi X, V, W delle sue tre componenti. Data la variabilità del processo si può assumere che i tre pesi siano indipendenti e, espressi in grammi, si distribuiscano come normali di medie 10, 20 e 15 e scarto quadratico medio (σ) rispettivamente 1, 2 e 3.

- Determinare la probabilità che il peso del prodotto Y sia maggiore di 50 gr

```
> (45-50)/sqrt(14)
```

```
[1] -1.336306
```

```
> 1-pnorm((45-50)/sqrt(14))
```

```
[1] 0.9092754
```

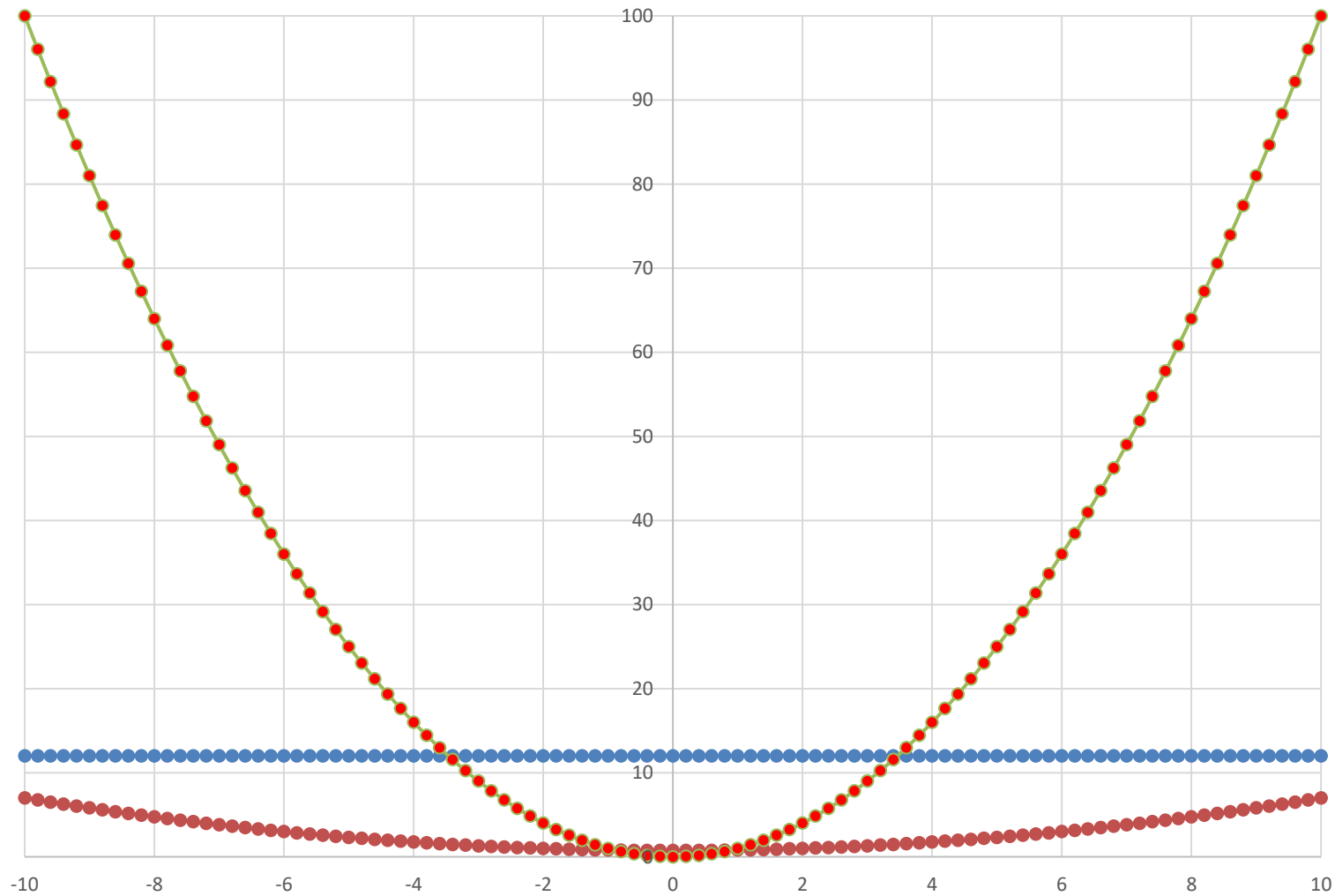
Esercizio 8

- Sia X una v.a. con valore atteso μ e varianza σ^2 e sia (X_1, X_2, X_3, X_4) un campione casuale semplice distribuito come X . Il seguente stimatore è uno stimatore corretto per μ ? Valutarne inoltre l'errore quadratico medio

$$T(X_1, X_2) = \frac{3}{4}X_1 - X_2 - X_3 + \frac{2X_4}{3}$$

T_1 is the only unbiased estimator, T_3 is biased but it is the one with the lowest variance, let's compare the MSE.

$$\begin{aligned}MSE_{\mu}(T_1) &= 3 \times \sigma^2 \\MSE_{\mu}(T_2) &= \frac{3}{16}\sigma^2 + \frac{\mu^2}{16} \\MSE_{\mu}(T_3) &= \mu^2\end{aligned}$$



—●— MSE1 —●— MSE2 —●— MSE3

Esercizio 9

Un test attitudinale rivolto agli studenti della scuola superiore è costruito in modo tale che i punteggi del test abbiano media $\mu=90$ e $\sigma=20$. Gli studenti in una scuola sono assegnati casualmente a varie classi di uno stesso corso. In una di queste classi composta da 100 studenti, se l'assegnazione degli studenti è casuale, qual è la probabilità di ottenere nel test una media minore o uguale a 86?

Esercizio 9

La media campionaria avrà una distribuzione approssimativamente normale, con media 90 e $\sigma = 2$.

Si ottiene:

$$P(\bar{X} \leq 86) = P\left(Z \leq \frac{86 - 90}{2}\right) = P(Z \leq -2) = 1 - P(Z \leq 2) = 0.0228$$

Esercizio 10

Siano $X_1, \dots, X_{144}$ variabili aleatorie iid con legge bernoulliana di parametro 0.4. Se

$$Y = \sum_{i=1}^{144} X_i$$

si fornisca una valutazione approssimata di $P(Y \leq 60)$.

Esercizio 10

$$Y = \sum_{i=1}^{144} X_i$$

si fornisca una valutazione approssimata di $P(Y \leq 60)$.

$$P(Y \leq 60) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{144} X_i - 144 \times 0.4}{\sqrt{144 \times 0.4 \times 0.6}} \leq \frac{60 - 144 \times 0.4}{\sqrt{144 \times 0.4 \times 0.6}}\right) =$$

$$P(Z \leq 0.408) = 0.6584$$