Matematica Generale - IV canale
Prova di Autovalutazione del 31/10/2005

I) Siano X, Y insiemi non vuoti e sia $f : X \to Y$ una funzione di X in Y. Provare che comunque considerati due sottoinsiemi B_1, B_2 di Y risulta

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \quad \text{e} \quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

Mostrare invece, mediante opportuni esempi, che in generale, dati due sottoinsiemi A_1, A_2 di X, è falsa la relazione

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

II) Dato $\mathbb{R}^2$, prodotto cartesiano dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ per sé stesso, discutere le proprietà della relazione $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita per ogni coppia di elementi $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x \equiv (x_1, x_2)$, $y \equiv (y_1, y_2)$ ponendo

$$x \rho y \overset{def}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 > y_1 & \text{se } x_1 \neq y_1 \\ x_2 > y_2 & \text{se } x_1 = y_1 \end{cases}$$

III) Sia $\mathbb{R}^2_+$ il prodotto cartesiano dell'insieme dei numeri reali non negativi $\mathbb{R}_+$ per sè stesso. Un elemento $x \in \mathbb{R}^2_+$ è allora una coppia di numeri reali non negativi $x \equiv (x_1, x_2)$ e si presta a rappresentare un possibile paniere di 2 beni di cosumo. Si supponga che la funzione di utilità di un consumatore rispetto all'acquisizione di un paniere di beni di consumo così costituito, $U : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$, sia data da

$$U(x_1, x_2) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{x_1 + x_2^2}.$$

Descrivere le curve di indifferenza. Si supponga inoltre che i due beni abbiano rispettivamente prezzi $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{++}$ e che il consumatore possa investire solo una quota fissa r_0 del suo reddito R nell'acquisto di un tale paniere di beni. Individuare la scelta ottima del consumatore.

IV) Dati gli insiemi

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x = \tfrac{(n+1)^2}{n}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}\}, \qquad \{x \in \mathbb{R} \mid x = \tfrac{n}{n^2+1}, \quad n \in \mathbb{N}\},$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x = \tfrac{(n+1)^2}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}\}, \qquad \{x \in \mathbb{R} \mid x = \tfrac{n+1}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}\},$$

dire se si tratta di insiemi superiormente e/o inferiormente limitati ed in caso affermativo individuarne l'insieme dei maggioranti, l'insieme dei minoranti, l'estremo superiore ed inferiore e gli eventuali massimi e minimi.

V) Tracciare qualitativamente i grafici delle funzioni

$$f(x) \overset{def}{=} 10^x, \qquad f(x) \overset{def}{=} \log_{10}(x),$$

$$f(x) \overset{def}{=} (1/4)^x, \qquad f(x) \overset{def}{=} \log_{1/4}(x).$$

VI) Studiare dominio, segno (quando possibile) e comportamento agli estremi del dominio delle funzioni caratterizzate dalle seguenti regole associative

$$f(x) \overset{def}{=} \ln(x^3 - x^2 + x - 1), \qquad f(x) \overset{def}{=} \exp(x^2 - 4),$$

$$f(x) \overset{def}{=} \tfrac{x^3-8}{x^2-4x+4}, \qquad f(x) \overset{def}{=} \exp\left(\tfrac{x^2-4x+3}{x^3-1}\right), \qquad f(x) \overset{def}{=} \ln\left(\tfrac{x^3-1}{x^2-5x+6}\right).$$