Note di Matematica Generale

Roberto Monte

December 13, 2005

ABSTRACT These notes are still a work in progress and are intended to be for internal use. Please, don't cite or quote.

Contents

1
Elementi di teoria dell'integrazione

1.1 Integrali Definiti

Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

Definizione 1 *Chiamiamo* partizione *di* $[a, b]$ *ogni insieme finito* $P \equiv \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ *di punti di* $[a, b]$ *tali che* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$*. Chiamiamo ampiezza della partizione* P *il nomero reale positivo* $\delta(P) \equiv \max\{x_k - x_{k-1},\ k = 1, \ldots, n\}$.

Esempio 2 *Comunque fissato* $n \in \mathbb{N}$ *poniamo* $x_k \equiv k/n$ *per ogni* $k = 0, 1, \ldots, n$*, allora l'insieme* $P \equiv \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ *è una chiaramente una partizione dell'intervallo* $[0, 1]$ *per la quale si ha* $\delta(P) = 1/n$.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una fuzione reale e limitata definita in $[a, b]$.

Definizione 3 *Data una partizione* $P \equiv \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ *di* $[a, b]$ *poniamo* $\ell_k \equiv \inf\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ *ed* $\bar{\ell}_k \equiv \sup\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ *per ogni* $k = 0, 1, \ldots, n$ *Chiamiamo allora* somma inferiore *[risp.* somma superiore*] relativa alla funzione* f *ed alla partizione* P *il numero reale*

$$\underline{s}(f, P) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{n} \ell_k (x_k - x_{k-1}) \quad \text{[\textit{risp.} } \bar{s}(f, P) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{n} \bar{\ell}_k (x_k - x_{k-1})\text{].}$$

Osservazione 4 *Posto* $\ell \equiv \inf\{f(x),\ x \in [a, b]\}$ *ed* $\bar{\ell} \equiv \sup\{f(x),\ x \in [a, b]\}$ *per ogni partizione* P *di* $[a, b]$ *risulta chiaramente*

$$\ell(b - a) \leq \underline{s}(f, P) \leq \bar{s}(f, P) \leq \bar{\ell}(b - a).$$

Sia $\mathfrak{P}$ la famiglia di tutte le possibili partizioni di $[a, b]$.

Osservazione 5 *L'insieme delle somme inferiori* $\{\underline{s}(f, P),\ P \in \mathfrak{P}\}$ *è non vuoto e superiormente limitato e l'insieme delle somme superiori* $\{\bar{s}(f, P),$ $P \in \mathfrak{P}\}$ *è non vuoto ed inferiormente limitato.*

Definizione 6 *Chiamiamo* integrale inferiore *di* f *in* $[a, b]$, *e lo denotiamo con il simbolo* $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$,*il numero reale*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{\underline{s}(f, P), P \in \mathfrak{P}\}.$$

Chiamiamo integrale superiore *di* f *in* $[a, b]$, *e lo denotiamo con il simbolo* $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$,*il numero reale*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{\bar{s}(f, P), P \in \mathfrak{P}\}.$$

Diciamo che f *è integrabile secondo Riemann in* $[a, b]$ *se risulta*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

In questo caso chiamiamo tale numero reale integrale (secondo Riemann) di f *in* $[a, b]$ *e lo denotiamo con il simbolo* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Esempio 7 *Sia* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *la funzione definita ponendo*

$$f(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1 & se\ x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & se\ x \in [0, 1] - \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Tale funzione non è integrabile secondo Riemann in $[0, 1]$.

Discussione. Infatti, comunque considerata la partizione $P \equiv \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ di $[a, b]$ risulta chiaramente per ogni $k = 1, \ldots, n$

$$\ell_k \equiv \inf\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 0,$$

e

$$\bar{\ell}_k \equiv \sup\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\} = 1.$$

Pertanto

$$\underline{s}(f, P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \ell_k (x_k - x_{k-1}) = 0,$$

e

$$\bar{s}(f, P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \bar{\ell}_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = 1.$$

Ne segue allora che

$$\{\underline{s}(f,P), P \in \mathfrak{P}\} = \{0\},$$

e

$$\{\bar{s}(f,P), P \in \mathfrak{P}\} = \{1\}.$$

Pertanto

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{\underline{s}(f,P), P \in \mathfrak{P}\} = 0,$$

e

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{\bar{s}(f,P), P \in \mathfrak{P}\} = 1.$$

A norma di definizione f non è integrabile in $[0,1]$.□

Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita ponendo

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x.$$

Tale funzione è integrabile secondo Riemann in $[0,1]$ e risulta

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Discussione. Fissato $n \in \mathbb{N}$ consideriamo la partizione $P \equiv \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ di $[0,1]$ definita ponendo $x_k \equiv k/n$ per ogni $k = 0,1,\ldots,n$. Per come definita la funzione f, relativamente a tale partizione si ha per ogni $k = 1,\ldots,n$

$$\ell_k \equiv \inf\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\} = x_{k-1} = \frac{k-1}{n}$$

e

$$\bar{\ell}_k \equiv \sup\{f(x),\ x \in [x_{k-1}, x_k]\} = x_k = \frac{k}{n}.$$

Pertanto

$$\underline{s}(f,P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \ell_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1),$$

e

$$\bar{s}(f,P) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \bar{\ell}_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k.$$

D'altra parte, è ben noto che

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},$$

e di conseguenza

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \sum_{k=1}^{n} k - n = \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Otteniamo allora

$$\underline{s}(f,P) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1) = \frac{1}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2n^2},$$

e

$$\bar{s}(f,P) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2n^2}.$$

Da ciò segue

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{\underline{s}(f,P), P \in \mathfrak{P}\} \geq \frac{n^2-n}{2n^2},$$

e

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf\{\bar{s}(f,P), P \in \mathfrak{P}\} \leq \frac{n^2+n}{2n^2}.$$

ossia

$$\frac{n^2-n}{2n^2} \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \frac{n^2+n}{2n^2}.$$

Data l'arbitrarietà di $n \in \mathbb{N}$ fissato e dato che

$$\sup\{\frac{n^2-n}{2n^2},\, n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2} = \frac{1}{2},$$

e

$$\inf\{\frac{n^2+n}{2n^2},\, n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2},$$

possiamo allora conlcudere che

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Ossia f è integrabile secondo Riemann in $[0,1]$ e $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.$\square$
Funzioni integrabili

1.1.1 Proprietà dell'integrale definito rispetto agli estremi di integrazione

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una fuzione reale e limitate definita e Riemann-integrabile sull'intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

Theorem 8 *Si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Theorem 9 *Comunque fissato un punto $c \in [a,b]$ si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

e

$$\int_c^c f(x)\,dx = 0.$$

1.1.2 Proprietà dell'integrale definito rispetto alla funzione integranda

Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni reali definite e Riemann-integrabili sull'intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

Theorem 10 (Linearità dell'Integrale Definito) *Per tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

Theorem 11 (Monotonia dell'Integrale Definito) *Supponiamo che si abbia*

$$f(x) \leq g(x)$$

per ogni $x \in [a,b]$. Risulta allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Corollary 12 *Si ha*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una fuzione reale e limitata definita sull'intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

Theorem 13 (Teorema della Media Integrale) *Supponiamo che $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sia continua. Allora esiste un punto $x_0 \in [a,b]$ tale che*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a).$$

Prova. Poichè la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua ed è definita su un intervallo chiuso e limitato, esistono

$$m \equiv \min_{x \in [a,b]} \{f(x)\} \qquad \text{e} \qquad M \equiv \min_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$$

per i quali si ha

$$m \leq f(x) \leq M$$

per ogni $x \in [a, b]$. Per il la proprietà di monotonia dell'integrale definito, si ha alllora

$$\int_a^b m\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b M\, dx,$$

ossia

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a),$$

di modo che possiamo scrivere

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\, dx \leq M.$$

Infine, ricordando che una funzione continua assume tutti i valori compresi tra il suo minimo ed il suo massimo, è possibile determinare un punto $x_0 \in [a, b]$ tale che

$$f(x_0) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Ciò completa la prova del teorema.□

1.2 Integrali Indefiniti

Definizione di integrale indefinito

1.2.1 Proprietà dell'integrale indefinito

Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni reali definite e continue sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Theorem 14 (Linearità dell'integrale indefinito) *Per tutti gli* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx.$$

1.3 Relazione tra integrazione definita ed indefinita

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione reale e limitata definita sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Theorem 15 (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale) *Supponiamo che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sia continua. Allora la funzione $F_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$ data da*

$$F_0(x) \stackrel{def}{=} \int_a^x f(u)\, du, \quad \forall x \in [a, b],$$

è derivabile per ogni $x \in [a, b]$ e si ha

$$\frac{d}{dx} F_0(x) = f(x).$$

In altri termini, la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ammette primitiva, e per ogni primitiva $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ si ha

$$\int_a^b f(u)\, du = F(b) - F(a).$$

Prova. *Per provare l'asserto consideriamo il rapporto incrementale della funzione $F_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$ relativo ad un generico punto $x \in (a, b)$ ed un incremento $h > 0$. Per le proprietà dell'integrale definito, si ha*

$$\begin{aligned} \frac{F_0(x+h) - F_0(x)}{h} &= \frac{\int_a^{x+h} f(u)\, du - \int_a^x f(u)\, du}{h} \\ &= \frac{\int_a^{x+h} f(u)\, du + \int_x^a f(u)\, du}{h} \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(u)\, du. \end{aligned}$$

D'altra parte, per il Teorema della Media Integrale, risulta

$$\int_x^{x+h} f(u)\, du = f(x_h) h$$

per un'opportuno punto $x_h \in [x, x+h]$. Si ha allora

$$\frac{F_0(x+h) - F_0(x)}{h} = \frac{1}{h} f(x_h) h = f(x_h),$$

e di conseguenza

$$\lim_{h \to 0} \frac{F_0(x+h) - F_0(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(x_h).$$

E' poi chiaro che quando $h \to 0$ *si ottiene che* $x + h \to x$ *e poichè* $x_h \in [x, x+h]$ *si ottiene anche* $x_h \to x$*. Ma allora per la continutà della funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *risulta*

$$\lim_{h\to 0} f(x_h) = f(x).$$

Ciò prova che la funzione $F_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è derivabile e che per* $x \in [a, b]$ *si ha*

$$\frac{d}{dx} F_0(x) = f(x).$$

Per provare la seconda parte dell'asserto osserviamo che considerata una qualsiasi primitiva $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *della funzione* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *per un'opportuna costante* $c \in \mathbb{R}$ *deve aversi*

$$F(x) = F_0(x) + c$$

per ogni $x \in [a, b]$*. Ne segue allora che*

$$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

In quanto per costruzione risulta

$$F_0(b) = \int_a^b f(x)\, dx \qquad e \qquad F_0(a) = \int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

Il Teorema è così completamente provato.$\square$

1.4 Tecniche di Integrazione indefinita

1.4.1 Funzioni immediatamente integrabili

1.4.2 Integrazione per decomposizione in somma

1.4.3 Integrazione per parti

Si desidera calcolare l'integrale indefinito

$$\int f(x)\, dx$$

dove $f(x)$ è una funzione non immediatamente integrabile. Si può cercare allora di determinare due funzioni $g(x)$ ed $h(x)$ per le quali si abbia

$$f(x) = g(x)h'(x)$$

e tali che si sappia calcolare l'integrale indefinito

$$\int g'(x)h(x)\, dx.$$

Quindi si può applicare la *formula di integrazione per parti*

$$\int f(x)\,dx = g(x)h(x) - \int g'(x)h(x)\,dx.$$

Esempio 16 *Calcolare l'integrale indefinito*

$$\int x\exp(x)\,dx.$$

Discussione. La funzione $f(x) = x\exp(x)$ non è immediatamente integrabile. D'altra parte è semplice riconoscere che si presenta nella forma

$$f(x) = g(x)h'(x),$$

per la scelta delle funzioni

$$g(x) = x \qquad \text{e} \qquad h(x) = \exp(x)$$

Applicando la formula di integrazione per parti, si ha allora

$$\begin{aligned}\int x\exp(x)\,dx &= x\exp(x) - \int \exp(x)\,dx \\ &= x\exp(x) - \exp(x) + c.\end{aligned}$$

Da notare che, se si fossero scelte le funzioni

$$g(x) = \exp(x) \qquad \text{e} \qquad h(x) = \frac{1}{2}x^2$$

avremmo avuto ancora

$$f(x) = g(x)h'(x),$$

ma si l'applicazione della formula di integrazione per parti avrebbe prodotto il risultato

$$\int x\exp(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\exp(x) - \frac{1}{2}\int x^2\exp(x)\,dx,$$

che non ci consente di uscire dall'impasse.□

Exercise 17 *Calcolare gli integrali indefiniti*

$$\int x^2\exp(x)\,dx, \qquad \int x^3\exp(x)\,dx.$$

Determinare quindi una formula ricorsiva per il calcolo dell'integrale

$$\int x^2\exp(x)\,dx, \qquad \forall n \geq 1.$$

Esempio 18 *Calcolare l'integrale indefinito*

$$\int \ln(x)\, dx.$$

Discussione. La funzione $f(x) = \ln(x)$ non è immediatamente integrabile. Ci si chiede allora se si possano determinare due funzioni $g(x)$ ed $h(y)$ per le quali si abbia

$$f(x) = g(x)h'(x).$$

E' naturale scegliere

$$g(x) = \ln(x),$$

nel qual caso non è difficile riconoscere che bisogna scegliere

$$h(x) = x.$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \int \ln(x)\, dx &= x\ln(x) - \int x\frac{1}{x}\, dx \\ &= x\ln(x) - \int dx \\ &= x\ln(x) - x + c. \end{aligned}$$

Exercise 19 *Calcolare gli integrali indefiniti*

$$\int x^2 \exp(x)\, dx, \qquad \int x^3 \exp(x)\, dx.$$

Determinare quindi una formula ricorsiva per il calcolo dell'integrale

$$\int x^2 \exp(x)\, dx, \qquad \forall n \geq 1.$$

Esempio 20 ***Exercise 21*** *Calcolare l'integrale indefinito*

$$\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\, dx.$$

1.4.4 Integrazione per sostituzione

Si desidera calcolare l'integrale indefinito

$$\int f(x)\, dx$$

dove $f(x)$ è una funzione non immediatamente integrabile. Si può cercare allora di determinare due funzioni $g(x)$ ed $h(y)$ per le quali si abbia

$$f(x) = h(g(x))g'(x)$$

e tali che si sappia calcolare l'integrale

$$\int h'(y)\,dy = H(y) + c.$$

Quindi si può applicare la *formula di integrazione per sostituzione*

$$\int f(x)\,dx = \int h(g(x))g'(x)\,dx = \int h'(y)\,dy = H(y) + c = H(g(x)) + c,$$

grazie alla sostituzione $y = g(x)$.

Esempio 22 *Calcolare l'integrale indefinito*

$$\int x\exp(x^2)\,dx.$$

Discussione. La funzione $f(x) = \exp(x^2)$ non è immediatamente integrabile. D'altra parte è semplice riconoscere che si presenta nella forma

$$f(x) = h(g(x))g'(x),$$

per la scelta delle funzioni

$$g(x) = x^2 \qquad \text{e} \qquad h(y) = \frac{1}{2}\exp(y).$$

Infatti, abbiamo

$$h(g(x))g'(x) = \frac{1}{2}\exp(g(x))g'(x) = \frac{1}{2}\exp(x^2)\cdot 2x = f(x).$$

Si ha allora

$$\int x\exp(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int \exp(y)\,dy = \frac{1}{2}\exp(y) + c = \frac{1}{2}\exp(x^2) + c,$$

grazie alla sostituzione $y = x^2$.

Esempio 23 *Calcolare l'integrale indefinito*

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx.$$

Discussione. La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln(x)$ non è immediatamente integrabile. D'altra parte si ha chiaramente

$$f(x) = h(g(x))g'(x),$$

per la scelta delle funzioni

$$g(x) = \ln(x) \qquad \text{e} \qquad h(y) = y.$$

Infatti, abbiamo

$$h(g(x))g'(x) = g(x)g'(x) = \frac{1}{x}\ln(x) = f(x).$$

Si ha allora

$$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \int y\,dy = \frac{1}{2}y^2 + c = \frac{1}{2}\ln(x)^2 + c,$$

grazie alla sostituzione $y = \ln(x)$.

Exercise 24 *Calcolare gli integrali indefiniti*

$$\int x\ln(x^2)\,dx, \qquad \int \frac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx, \qquad \int \frac{x^3}{x^4+1}.$$