Note di Matematica Generale

Roberto Monte

October 11, 2006

ABSTRACT
These notes are still a work in progress and are intended to be for internal use. Please, don't cite or quote.

Contents

1

Elementi di Teoria Elementare degli Insiemi

La definizione dei concetti di *ente* e di *insieme* di enti è stata oggetto di profondi dibattiti nell'ambito della matematica dei fondamenti ed ha subito un lungo processo di raffinamento a partire dalla definizione "naive" data da Cantor, che sostanzialmente assumeva tali concetti come "primitivi" e quindi non ulteriormente specificabili senza ricorrere a circolarità linguistiche. Comunque, ai nostri fini, la definizione di Cantor costitisce un punto di partenza accettabile, e non ci soffermeremo sulle celebri antinomie cui dà luogo.

Definizione (Cantor) Chiamiamo *insieme* una qualsiasi collezione di oggetti ben definiti e distinti della nostra percezione o del nostro pensiero, concepiti come un tutto unico; tali oggetti si dicono *elementi* dell'insieme.

Definizione Chiamiamo *insieme vuoto* l'insieme che non contiene alcun elemento.

Notazioni Denoteremo generalmente gli insiemi con lettere maiuscole, e.g. A, B, C,..., X, Y, Z, e denoteremo gli elementi di un insieme con lettere minuscole, e.g. a, b, c,..., x, y, z. Per indicare che un elemento a *appartiene* [risp. *non appartiene*] ad un insieme A scriveremo $a \in A$ [risp. $a \notin A$].

Ipotesi Assumeremo che tra un ente x ed un insieme X intercorra sempre una ed una sola delle relazioni $x \in X$ o $x \notin X$.

Notazioni Un modo usuale di denotare un insieme è di elencare tutti i suoi elementi racchiudendoli tra parentesi graffe $\{\dots\}$. Questa è la cosiddetta *notazione estensiva*.

Così, ad esempio, con il simbolo

$$\{a, b, c\}$$

denoteremo l'insieme composto dalle lettere a, b, c dell'alfabeto; con

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 9\}$$

denoteremo l'insieme delle 10 cifre della numerazione in base decimale; con

$$\{0, 1\}$$

denoteremo l'insieme delle 2 cifre della numerazione in base binaria; con

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 9, A, B, C, D, E, F\}$$

denoteremo l'insieme delle 16 cifre della numerazione in base esadecimale.

Notazione L'insieme vuoto viene spesso denotato con il simbolo $\{\,\}$, ma più frequentemente con $\emptyset$.

La notazione estensiva può anche essere usata per denotare insiemi che non contengono un numero finito di elementi. Ad esempio con

$$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

possiamo denotare l'insieme dei *numeri naturali*; con

$$\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

l'insieme dei *numeri interi relativi*. Tuttavia, per questi due insiemi preferiremo le notazioni sintetiche $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, rispettivamente.

Definizione Chiamiamo *predicato* una proprietà concernente gli elementi x di un insieme X di cui si possa stabilire, senza ambiguità, che sia vera o falsa.

Notazione Denoteremo generalmente un predicato concernente gli elementi x di un insieme X con il simbolo $p(x)$.

Esempio Relativamente agli elementi $n \in \mathbb{N}$ la proprietà $p_p(n)$ di essere un numero *pari*, in simboli

$$p_p(n) : n = 2k,\ \ k \in \mathbb{N},$$

è un predicato, così pure lo è la proprietà $p_d(n)$ di essere un numero *dispari*, in simboli

$$p_d(n) : n = 2k + 1, \; k \in \mathbb{N}.$$

Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo stabilire senza ambiguità se $p_p(n)$ e $p_d(n)$ siano vere o false.

Esempio Relativamente agli elementi $n \in \mathbb{N}$ la proprietà $p_f(n)$ di essere un numero fortunato e $p_s(n)$ di essere un numero sfortunato non sono dei predicati. Infatti, nonostante le accanite ricerche cabalistiche che si protraggono ormai da millenni, a tutt'oggi non sembra potersi stabilire univocamente di ciascun $n \in \mathbb{N}$ se esso sia fortunato o sfigato.

Un predicato può risultare dalla composizione di altri predicati mediante l'uso della negazione *non*, o di *connettivi logici.* I connettivi logici di cui faremo uso sono il connettivo *vel*, col significato di *o congiuntivo* [1], ossia *o …, o anche …*, ed il connettivo *et*, col significato di *e congiuntiva*, ossia *… e …*.

Notazione Denoteremo con il simbolo $\neg$ la negazione *non* e con i simboli $\vee$ e $\wedge$ i connettivi logici *vel* ed *et* rispettivamente.

Notazione Dati i predicati $p(x)$ e $q(x)$ concernenti gli elementi x di un insieme X, denoteremo con

$$\neg p(x)$$

il predicato che risulta essere vero relativamente all'elemento x se e solo se $p(x)$ è falso. Denoteremo con

$$p(x) \vee q(x)$$

il predicato che risulta essere vero relativamente all'elemento x se e solo se almeno uno tra $p(x)$ e $q(x)$ è vero. Denoteremo con

$$p(x) \wedge q(x)$$

il predicato che risulta essere vero relativamente all'elemento x se e solo se entrambi $p(x)$ e $q(x)$ sono veri.

Oservazione Dati i predicati $p(x)$ e $q(x)$ concernenti gli elementi x di un insieme X, il predicato

$$(p(x) \wedge \neg q(x)) \vee (\neg p(x) \wedge q(x))$$

risulta essere vero relativamente all'elemento x se e solo se $p(x)$ oppure $q(x)$ è vero. In altri termini significa $p(x)$ *aut* $q(x)$.

---

[1] da non confondere con il connettivo logico *aut*, che esprime una *o disgiuntiva*, ossia *o …, oppure …*

Esempio Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali. Sia $p(n)$ il predicato definto come

$$p(n) : n = k^2, \ k \in \mathbb{N},$$

ossia "n è un quadrato". Sia $q(x)$ il predicato definto come

$$p(n) : n = k^3, \ k \in \mathbb{N},$$

ossia "n è un cubo". Il predicato $\neg p(n)$ si legge allora come "n non è un quadrato" ed è vero per quei numeri naturali che non risultano essere dei quadrati, mentre è falso per quei numeri naturali che risultano essere dei quadrati. Il predicato $p(x) \vee q(x)$ si legge come "n è un quadrato o un cubo" ed è vero per tutti e soli i numeri naturali che risultano essere quadrati o anche cubi. Il predicato $p(x) \wedge p(x)$ si legge come "n è un quadrato ed un cubo" ed è vero solo per tutti e soli i numeri naturali che risultano essere sia quadrati che cubi (quali?). Infine il predicato $(p(x) \wedge \neg q(x)) \vee (\neg p(x) \wedge q(x))$ si legge come "n è un quadrato oppure un cubo" ed è vero per tutti e soli i numeri naturali che risultano essere quadrati e non cubi o anche cubi e non quadrati.

Simbologia Nel seguito faremo spesso uso dei seguenti simboli:

1 $\forall$ da leggersi "per ogni", "comunque considerato",

2 $\exists$ da leggersi "esiste almeno un",

3 $\exists!$ da leggersi "esiste un unico",

4 $\nexists$ da leggersi "non esiste alcun",

5 $\Rightarrow$ da leggersi "implica", "comporta", "allora",

6 $\Leftrightarrow$ da leggersi "equivale", "se e solo se",

7 $|$ da leggersi "tale che".

1.1 Insiemi e Sottoinsiemi

Siano X ed Y due insiemi.

Definizione Diciamo che X ed Y sono *uguali* se contengono gli stessi elementi.

Definizione Diciamo che X è *sottoinsieme* di Y, o che X è *contenuto* in Y, o anche che Y *contiene* X, e scriviamo

$$X \subseteq Y,$$

se ogni elemento di X appartiene anche ad Y. In simboli,

$$X \subseteq Y \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X \Rightarrow x \in Y.$$

Diciamo che è *sottoinsieme proprio*, o è *propriamente contenuto* in Y, o anche che Y *contiene propriamente* X, e scriviamo

$$X \subset Y,$$

se X è sottoinsieme di Y ed inoltre vogliamo sottolineare che esiste almeno un elemento di Y che non appartiene ad X. In simboli,

$$X \subset Y \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y \ \wedge \ \exists y \in Y \mid y \notin X.$$

Esempio L'insieme $\{0, 1\}$ delle cifre impiegate nella numerazione in binaria è propriamente contenuto nell'insieme $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ delle cifre impiegate nella numerazione decimale. Analogamente, Il sottoinsieme dei numeri naturali esprimibili in numerazione binaria è contenuto nel sottoinsime dei numeri naturali esprimibili in base decimale. E' il primo sottoinsieme propriamente contenuto nel secondo?

Osservazione L'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni insieme ed è sottoinsieme proprio di ogni insieme non vuoto.

Principio di Estensionalità Gli insiemi X ed Y sono uguali se e solo se X è sottoinsieme di Y ed Y è sottoinsieme di X. In simboli,

$$X = Y \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y \ \wedge \ Y \subseteq X.$$

Osservazione Dato un predicato $p(x)$ concernente gli elementi x di un insieme X è naturale considerare il sottoinsieme degli elementi di X per i quali il predicato è vero, in simboli

$$\{x \in X \mid p(x)\}.$$

L'impiego di un predicato è spesso il modo più conveniente per individuare i sottoinsiemi di un dato insieme X, nella cosiddetta *notazione sintetica*. In particolare, dato un qualsiasi predicato $p(x)$ concernente gli elementi x di un insieme X il sottoinsieme di X

$$\{x \in X \mid p(x) \ \wedge \ \neg p(x)\}$$

è l'insieme vuoto.

Esempio Il sottonsieme dei numeri naturali pari $\{0, 2, 4, ...\} \equiv \mathbb{P}$ può essere convenientemente individuato dalla notazione

$$\mathbb{P} \equiv \{n \in \mathbb{N} \, | p_p(n)\} \equiv \{n \in \mathbb{N} \, | n = 2k, \ k \in \mathbb{N}\}.$$

Analogamente il sottoinsieme dei numeri naturali dispari $\{1,3,5,...\} \equiv \mathbb{D}$ può essere descritto come

$$\mathbb{D} \equiv \{n \in \mathbb{N} \mid p_d(n)\} \equiv \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Esempio Non è difficile provare che

$$\{n \in \mathbb{N} \mid p_p(n) \vee p_d(n)\} = \mathbb{N},$$

e

$$\{n \in \mathbb{N} \mid p_p(n) \wedge p_d(n)\} = \emptyset.$$

Come esempio di un elementare ragionamento matematico proviamo che

$$\{n \in \mathbb{N} \mid p_p(n) \wedge p_d(n)\} = \emptyset.$$

A tale scopo, supponiamo esista $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che sia $p_p(n_0) \wedge p_d(n_0)$ sia vero. In altri termini, supponiamo esista $n_0 \in \mathbb{N}$ che abbia la proprietà di essere sia pari che dispari. Per essere n_0 pari esisterà un certo $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$n_0 = 2k_0.$$

Per essere n_0 dispari esisterà un certo $\ell_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$n_0 = 2\ell_0 + 1.$$

Per tali k_0 ed ℓ_0 dovrà allora aversi

$$2k_0 = 2\ell_0 + 1.$$

Pertanto, assumendo che $k_0 \geq \ell_0$ (alternativamente si potrebbe assumere che $k_0 \leq \ell_0$) ne seguirebbe

$$2(k_0 - \ell_0) = 2k_0 - 2\ell_0 = 1.$$

Ossia il numero 1 risulterebbe essere un pari! Ciò è manifestamente assurdo e tale assurdo deriva dall'aver ipotizzato l'esistenza di un numero naturale n_0 al contempo pari e dispari. Possiamo pertanto concludere che non esiste alcun numero naturale che abbia la proprietà di essere sia pari che dispari.

Esercizio Con riferimento all'Esempio (1), descrivere con notazione estensiva i seguenti sottoinsiemi di numeri naturali

$$\{n \in \mathbb{N} \mid p(n)\}, \quad \{n \in \mathbb{N} \mid q(n)\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \neg p(n)\}, \quad \{n \in \mathbb{N} \mid \neg q(n)\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \vee q(n)\}, \quad \{n \in \mathbb{N} \mid p(n) \wedge q(n)\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid (p(n) \wedge \neg q(n)) \vee (\neg p(n) \wedge q(n))\}.$$

Esercizio Determinare i sottoinsiemi di numeri naturali individuati dalle notazioni

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n = k^2,\ k \in \mathbb{N} \vee n = 2\ell,\ \ell \in \mathbb{N}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n = k^2,\ k \in \mathbb{N} \wedge n = 2\ell,\ \ell \in \mathbb{N}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n = k^2,\ k \in \mathbb{N} \vee n = 2\ell + 1,\ \ell \in \mathbb{N}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n = k^2,\ k \in \mathbb{N} \wedge n = 2\ell + 1,\ \ell \in \mathbb{N}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n = k^2,\ k \in \mathbb{N} \wedge n = \ell^3,\ \ell \in \mathbb{N}\},$$

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n = k^2,\ k \in \mathbb{N} \vee n = \ell^3,\ \ell \in \mathbb{N}\}.$$

Esercizio Determinare i sottoinsiemi di numeri interi individuati dalle notazioni

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid n = k^2,\ k \in \mathbb{Z} \vee n = 2\ell,\ \ell \in \mathbb{Z}\},$$

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid n = k^2,\ k \in \mathbb{Z} \wedge n = 2\ell,\ \ell \in \mathbb{Z}\},$$

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid n = k^2,\ k \in \mathbb{Z} \vee n = 2\ell + 1,\ \ell \in \mathbb{Z}\},$$

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid n = k^2,\ k \in \mathbb{Z} \wedge n = 2\ell + 1,\ \ell \in \mathbb{Z}\},$$

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid n = k^2,\ k \in \mathbb{Z} \wedge n = \ell^3,\ \ell \in \mathbb{Z}\},$$

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid n = k^2,\ k \in \mathbb{Z} \vee n = \ell^3,\ \ell \in \mathbb{Z}\}.$$

1.2 Operazioni sugli Insiemi

Sia X un insieme non vuoto.

Definizione Data una qualsiasi coppia A, B di sottoinsiemi di X, chiamiamo *unione* di A con B, e lo denotiamo con il simbolo $A \cup B$, il sottoinsieme di tutti gli elementi di X che appartengono ad almeno uno dei sottoinsiemi A e B. In simboli,

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}.$$

Proposizione Siano A, B, C sottoinsiemi di X. Risulta:

1. $A \cup A = A$;

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

3. $A \cup B = B \cup A$;

4. $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$, in particolare $A \cup X = X \Leftrightarrow A = X$ e $A \cup \emptyset = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$.

Definizione Data una qualsiasi coppia A, B di sottoinsiemi di X, chiamiamo *intersezione* di A con B, e lo denotiamo con il simbolo $A \cap B$, il sottoinsieme di tutti gli elementi di X che appartengono ad entrambi i sottoinsiemi A e B. In simboli,

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}.$$

Proposizione Siano A, B, C sottoinsiemi di X. Risulta:

1. $A \cap A = A$;

2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

3. $A \cap B = B \cap A$;

4. $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$, in particolare $A \cap X = X \Leftrightarrow A = X$ e $A \cap \emptyset = A \Leftrightarrow A = \emptyset$.

Definizione Diciamo che due sottoinsiemi A, B di X sono *disgiunti*, se risulta

$$A \cap B = \emptyset.$$

Proposizione (Legge Distributiva) Siano A, B, C sottoinsiemi di X. Risulta:

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Ancora come esempio di un elementare ragionamento matematico, dimostriamo che

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,, \tag{1.1}$$

A tale scopo, applicando il Principio di Estensionalità (1.1) cerchiamo di mostrare che

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{1.2}$$

e

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)\,. \tag{1.3}$$

Ricordando la Definizione (1.1), per provare la (1.2) dobbiamo fare vedere che ogni elemento di $A \cup (B \cap C)$ appartiene anche a $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Viceversa, per provare la (1.3) dobbiamo fare vedere che ogni elemento di $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ appartiene anche a $A \cup (B \cap C)$.

Consideriamo allora un generico elemento $x \in A \cup (B \cap C)$. Un tale elemento appartiene ad A o anche a $B \cap C$. Nel caso in cui $x \in A$, a maggior ragione $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$ (dal momento che A è chiaramente sia sottoinsieme di $A \cup B$ che sottoinsieme di $A \cup C$) e possiamo allora concludere che $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Nel caso in cui $x \in B \cap C$, allora

$x \in B$ e $x \in C$. Ancora a maggior ragione $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$ (infatti B e C sono sottoinsiemi di $A \cup B$ ed $A \cup C$ rispettivamente). Pertanto anche in questo caso arriviamo a concludere che $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. In definitiva nell'ipotesi $x \in A \cup (B \cap C)$ otteniamo in ogni caso che $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e ciò prova la (1.2).

Consideriamo poi un generico elemento $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Un tale elemento appartiene ad $A \cup B$ ed a $A \cup C$. Ricordando l'Ipotesi (1), si possono verificare due casi: $x \in A$ ed $x \notin A$. Nel caso $x \in A$, si ha chiaramente $x \in A \cup (B \cap C)$. Nel caso $x \notin A$, poichè $x \in A \cup B$ ed $x \in A \cup C$, non rimane che conludere che $x \in B$ ed $x \in C$. Ne segue allora che $x \in B \cap C$ ed infine $x \in A \cup (B \cap C)$. Nuovamente dall'ipotesi $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ otteniamo in ogni caso che $x \in A \cup (B \cap C)$ il che prova la (1.3).

Infine, avento mostrato la sussistenza di (1.2) e (1.3), possiamo concludere che la (1.1) é vera.

Esercizio Provare che

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,.$$

Definizione Data una qualsiasi coppia A, B di sottoinsiemi di X, chiamiamo *differenza* di A e B, e lo denotiamo con il simbolo $A - B$, il sottoinsieme di tutti gli elementi di X che appartengono ad A e non appartengono a B. In simboli,

$$A - B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid x \in A \ \vee \ x \notin B\}.$$

Osservazione Siano A, B sottoinsiemi di X. Risulta:

1. $A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;

2. $A - B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B$.

Definizione Dato un qualsiasi sottoinsieme A di X, chiamiamo *complementare* di A in X, e lo denotiamo con il simbolo A^{c}_X, il sottoinsieme di tutti gli elementi di X che non appartengono ad A. In simboli,

$$A^{\mathrm{c}}_X \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid x \notin A\}\,.$$

Osservazione Risulta:

$$X^{\mathrm{c}}_X = \emptyset \quad \text{and} \quad \emptyset^{\mathrm{c}}_X = X.$$

Osservazione Per ogni coppia A, B di sottoinsiemi di X si ha

$$A - B = A \cap B^{\mathrm{c}}_X.$$

Proposizione (Leggi di De Morgan) Siano A, B sottoinsiemi di X. Risulta:

1. $(A \cup B)^c_X = A^c_X \cap B^c_X$;

2. $(A \cap B)^c_X = A^c_X \cup B^c_X$.

Sempre come esempio di elementare ragionamento ,matematico dimostriamo che

$$(A \cup B)^c_X = A^c_X \cap B^c_X. \tag{1.4}$$

Anche in questo caso, applicando il Principio di Estensionalià, cerchiamo di mostrare che

$$(A \cup B)^c_X \subseteq A^c_X \cap B^c_X \tag{1.5}$$

e

$$A^c_X \cap B^c_X \subseteq (A \cup B)^c_X\,. \tag{1.6}$$

Ricordando la Definizione (1.1), per provare la (1.5) dobbiamo fare vedere che ogni elemento di $(A \cup B)^c_X$ appartiene anche a $A^c_X \cap B^c_X$. Viceversa, per provare la (1.6) dobbiamo fare vedere che ogni elemento di $A^c_X \cap B^c_X$ appartiene anche a $(A \cup B)^c_X$.

Sia dunque $x \in (A \cup B)^c_X$. Per definizione, $x \notin A \cup B$ e ciò accade solo se $x \notin A$ e $x \notin B$. Sempre per definizione, ne segue allora che $x \in A^c_X$ e $x \in B^c_X$. Pertanto $x \in A^c_X \cap B^c_X$. Viceversa, se $x \in A^c_X \cap B^c_X$, allora $x \in A^c_X$ e $x \in B^c_X$. Per definizione, $x \notin A$ e $x \notin B$ e ciò comporta che $x \notin A \cup B$. Allora, sempre per definizione, $x \in (A \cup B)^c_X$ e la (1.4) è completamente provata.

Esercizio Provare che

$$(A \cap B)^c_X = A^c_X \cup B^c_X.$$

1.3 Insieme delle Parti

Sia X un insieme.

Definizione Chiamiamo *insieme delle parti* di X, o *famiglia di tutti i sottoinsiemi* di X, e lo denotiamo con il simbolo $\mathfrak{P}(X)$, l'insieme avente per elementi tutti e soli i sottoinsiemi di X. In simboli,

$$\mathfrak{P}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \mid A \subseteq X\}.$$

Da notare che le due scritture $A \in \mathfrak{P}(X)$ e $A \subseteq X$ sono perfettamente equivalenti.

Esercizio Descrivere con notazione estensiva l'insieme delle parti degli insiemi

$$\{0,1\}$$

e

$$\{a,b,c\}$$

1.4 Prodotto Cartesiano

Definizione Data una qualsiasi coppia X, Y di insiemi, chiamiamo *prodotto cartesiano* di X ed Y, e lo denotiamo con il simbolo $X \times Y$, l'insieme avente per elementi tutti e soli le coppie ordinate (x, y) di primo elemento $x \in X$ e secondo elemento $y \in Y$. In simboli,

$$X \times Y \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,y) \mid x \in X \ \wedge \ y \in Y\}.$$

Definizione Più in generale, dati gli insiemi $X_1, \ldots, X_n$, chiamiamo *prodotto cartesiano* di $X_1, \ldots, X_n$, e lo denotiamo con il simbolo $X_1 \times \cdots \times X_n$, l'insieme avente per elementi tutti e soli le n-ple ordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ il cui k-esimo elemento $x_k \in X_k$, per ogni $k = 1, \ldots, n$. In simboli,

$$X_1 \times \cdots \times X_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \ \wedge \cdots \wedge \ x_n \in X_n\}.$$

Esercizio Descrivere i seguenti insiemi

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Esercizio Descrivere i seguenti insiemi

$$\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = 1\},$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = 0\},$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = a, \ a \in \mathbb{N}\},$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = 1\},$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = 0\},$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = a, \ a \in \mathbb{N}\},$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x\},$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = 2x\},$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = 2x + 1\},$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = ax + b,\ a, b \in \mathbb{N}\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = 2y\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = 2y + 1\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x = ay + b,\ a, b \in \mathbb{N}\},$$

Esercizio Descrivere i seguenti insiemi

$$\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x^2\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = 2x^2\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = 2x^2 + x\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = 2x^2 + x + 1\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{Z}\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = y^2\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = 2y^2\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = 2y^2 + y\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = 2y^2 + y + 1\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x = ay^2 + by + c,\ a, b, c \in \mathbb{Z}\},$$

Esercizio Descrivere i seguenti insiemi

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid z = a,\ a \in \mathbb{Z}\},$$
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid z = x + y\},$$
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid z = x^2 + y^2\},$$
$$\{(x,y,z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid z = x^3 + y^3\},$$

Esercizio Risulta

$$(A \times B) \cap (C \times D) \subseteq (A \cap C) \times (B \cap D)\,.$$

Vale il viceversa?

Esercizio Risulta

$$(A \times B) \cup (C \times D) = ?$$