Note di Matematica Generale

Roberto Monte

October 16, 2006

Abstract

These notes are still a work in progress and are intended to be for internal use. Please, don't cite or quote.

Contents

Chapter 1

Elementi di teoria Elementare degli insiemi Numerici

1.1 Insieme dei Numeri Naturali

L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} \equiv \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ è strutturalmente il più semplice tra gli insiemi numerici. Sfruttando l'idea di *cardinalità* (numerosità) di un insieme finito, corrispondente all'operazione mentale del contare, i numeri naturali possono essere introdotti a partire dalla nozione di insieme vuoto nel seguente modo

$$
\begin{aligned}
&0 \stackrel{\text{def}}{=} \emptyset \\
&1 \stackrel{\text{def}}{=} \{0\} = \{\emptyset\} \\
&2 \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
&3 \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
&4 \stackrel{\text{def}}{=} \{0, 1, 2, 3\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Principio di Induzione Sia S un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ che soddisfa le seguenti proprietà

1. $0 \in S$;

2. nell'ipotesi che un generico $n \in \mathbb{N}$ appartenga ad S è possibile provare che il successivo di tale n appartiene anche esso ad S.

Risulta allora $S = \mathbb{N}$.

Cerchiamo di chiarire il significato del principio di induzione con qualche commento.

Per via della Proprietà 1.1 il sottoinsieme S di $\mathbb{N}$ è caratterizzato dalla circostanza che qualsiasi naturale gli appartenga, gli appartiene necessariamente anche il successivo di tale naturale. In più la Proprietà 1.1 assicura che $0 \in S$. Ma allora combinando la 1.1 con la 1.1 abbiamo anche che $1 \in S$. Pertanto, riapplicando la 1.1 abbiamo che anche $2 \in S$. Applicando ancora la 1.1 otteniamo che anche $3 \in S$ e così via. Questo procedimento iterativo non sembra arrestarsi mai ed è quindi naturale concludere che in virtù delle 1.1 e 1.1 S contiene tutti i naturali, ossia $S = \mathbb{N}$.

Cercheremo di illustrare ancora meglio il Principio di induzione più avanti, presentando numerosi esempi della sua applicazione.

Definizione (Operazione di Somma su $\mathbb{N}$) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$n + 0 \overset{\text{def}}{=} 0 + n \overset{\text{def}}{=} n. \tag{1.1}$$

Supponendo di avere definito $m + n$ per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$m + (n + 1) \overset{\text{def}}{=} (1 + m) + n \overset{\text{def}}{=} \{0, 1, \ldots, m + n\} \tag{1.2}$$

Osservazione Per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$n + 1 = 1 + n = \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Infatti, applicando la (1.1) e la (1.2) della Definizione (1.1), possiamo scrivere

$$n + 1 = n + (0 + 1) = \{0, 1, \ldots, n + 0\} = \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Analogamente,

$$1 + n = (1 + 0) + n = \{0, 1, \ldots, 0 + n\} = \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Esempio Calcoliamo $5 + 3$ applicando la Definizione (1.1). Per l'Osservazione (1.1) possiamo scrivere

$$3 = \{0, 1, 2\} = 2 + 1.$$

Allora, per la (1.2) della Definizione (1.1), abbiamo

$$5 + 3 = 5 + (2 + 1) = \{0, 1, \ldots, 5 + 2\}.$$

Pertanto sapremo il risultato di $5 + 3$ una volta conosciuto il risultato di $5 + 2$. D'altra parte, sempre per l'Osservazione (1.1), possiamo scrivere

$$2 = \{0, 1\} = 1 + 1$$

Allora, sempre per la (1.2) della Definizione (1.1), abbiamo

$$5 + 2 = 5 + (1 + 1) = \{0, 1, \dots, 5 + 1\}.$$

Pertanto sapremo il risultato di $5 + 2$ una volta conosciuto il risultato di $5 + 1$. Ma,ancora per l'Osservazione (1.1) e la definizione dei numeri naturali, abbiamo

$$5 + 1 = \{0, 1, \dots, 5\} \stackrel{\text{def}}{=} 6.$$

Ne segue che

$$5 + 2 = \{0, 1, \dots, 5 + 1\} = \{0, 1, \dots, 6\} \stackrel{\text{def}}{=} 7,$$

ed infine che

$$5 + 3 = \{0, 1, \dots, 5 + 2\} = \{0, 1, \dots, 7\} \stackrel{\text{def}}{=} 8.$$

Osservazione (Proprietà della Somma su $\mathbb{N}$) Comunque considerati $\ell, m.n \in \mathbb{N}$ risulta:

1. $(\ell + m) + n = \ell + (m + n)$ (proprietà associativa);

2. $m + n = n + m$ (proprietà commutativa);

3. $n + 0 = 0 + n = n$ (esistenza di un elemento neutro per la somma).

Notazione Comunque considerati $\ell, m, n \in \mathbb{N}$, stante la proprietà associativa della somma, la scrittura $\ell + m + n$ non presenta ambiguità interpretative.

Definizione (Operazione di Prodotto su $\mathbb{N}$) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$n \cdot 0 \stackrel{\text{def}}{=} 0 \cdot n \stackrel{\text{def}}{=} 0. \tag{1.3}$$

Supponendo di avere definito $m \cdot n$ per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$m \cdot (n + 1) \stackrel{\text{def}}{=} m \cdot n + m, \tag{1.4}$$

e

$$(m + 1) \cdot n \stackrel{\text{def}}{=} m \cdot n + n. \tag{1.5}$$

Osservazione Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$n \cdot 1 = 1 \cdot n = n.$$

Infatti, per la (1.1) abbiamo

$$0 + 1 = 1.$$

Pertanto, applicando consecutivamente la (1.4), la (1.3) e la (1.1), possiamo scrivere

$$n \cdot 1 = n + (0 + 1) = n \cdot 0 + n = 0 + n = n.$$

Analogamente, applicando consecutivamente la (1.5), la (1.3) e la (1.1), possiamo scrivere

$$1 \cdot n = (0+1) \cdot n = 0 \cdot n + n = 0 + n = n.$$

Esempio Calcoliamo $5 \cdot 3$ applicando la Definizione (1.1). Poichè abbiamo

$$3 = \{0, 1, 2\} = 2 + 1,$$

appllicando la (1.4), possiamo scrivere

$$5 \cdot 3 = 5 \cdot (2+1) = 5 \cdot 2 + 5.$$

Pertanto sapremo il risultato di $5 \cdot 3$ una volta conosciuto il risultato di $5 \cdot 2$. D'altra parte, per l'Osservazione (1.1), risulta

$$2 = \{0, 1\} = 1 + 1.$$

Allora, applicando consecutivamente la (1.4) e l'Osservazione (1.1), abbiamo

$$5 \cdot 2 = 5 \cdot (1+1) = 5 \cdot 1 + 5 = 5 + 5.$$

In definitiva,

$$5 \cdot 3 = 5 \cdot 2 + 5 = 5 + 5 + 5.$$

Osservazione (Proprietà del Prodotto su $\mathbb{N}$) Comunque considerati $\ell, m.n \in \mathbb{N}$ risulta:

1. $(\ell \cdot m) \cdot n = \ell \cdot (m \cdot n)$ (proprietà associativa);

2. $m \cdot n = n \cdot m$ (proprietà commutativa);

3. $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n$ (esistenza di un elemento neutro per il prodotto).

Notazione Comunque considerati $\ell, m, n \in \mathbb{N}$, stante la proprietà associativa del prodotto, la scrittura $\ell \cdot m \cdot n$ non presenta ambiguità interpretative.

Osservazione (Proprietà Distributiva del Prodotto rispetto alla Somma su $\mathbb{N}$) Comunque considerati $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ risulta:

$$\ell \cdot (m+n) = \ell \cdot m + \ell \cdot n.$$

Proposizione Per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sum_{k=0}^{n} k \equiv 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.6}$$

Dimostrazione Sia S il sottoinsieme dei numeri naturali per i quali la (1.6) è vera. Osserviamo anzitutto che $0 \in S$, in quanto

$$\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0 \cdot 1}{2}.$$

Supponiamo allora che la (1.6) sia vera per un generico $n \in \mathbb{N}$ e sfruttando tale ipotesi cerchiamo di provare che essa risulta vera anche per il successivo di tale n, ossia per $n+1$. In altri termini cerchiamo di dimostrare che risulta

$$\sum_{k=0}^{n+1} k \equiv 0 + 1 + 2 + \cdots + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{1.7}$$

assumendo vera la (1.6). A tale scopo dobbiamo cercare di riscrivere la (1.7) in modo che sia possibile sfruttare la sussistenza della (1.6). Osserviamo allora che per la proprietà associativa della somma tra naturali risulta

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + (n+1).$$

Ma allora, grazie alla (1.6) possiamo scrivere

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Ossia

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

In definitiva, nell'ipotesi che la (1.6) sia vera, risulta essere vera anche la (1.7). Per il principio di induzione possiamo allora concludere che il sottoinsieme S dei numeri naturali per i quali la (1.6) è vera coincide con $\mathbb{N}$. In altri termini la formula (1.6) è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Definizione (Operazione di Fattoriale $\mathbb{N}$) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ chiamiamo *n-fattoriale* il simbolo $n!$ definito nel modo seguente:

$$0! \stackrel{\text{def}}{=} 1. \tag{1.8}$$

Supponendo di avere definito $n!$ per un generico $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$(n+1)! \stackrel{\text{def}}{=} n!(n+1).$$

Definizione (Operazione di Elevazione a Potenza su $\mathbb{N}$) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$n^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1 \tag{1.9}$$

Supponendo di avere definito n^m per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$n^{(m+1)} \stackrel{\text{def}}{=} n^m \cdot n. \tag{1.10}$$

Osservazione Per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$n^1 = n.$$

Infatti, per la (1.1), possiamo scrivere

$$1 = 0 + 1,$$

ed applicando consecutivamente la (1.10), la (1.9) e l'Osservazione (1.1) otteniamo

$$n^1 = n^{(0+1)} = n^0 \cdot n = 1 \cdot n = n.$$

Esempio Calcoliamo 5^3 applicando la Definizione (1.1). Poichè abbiamo

$$3 = \{0, 1, 2\} = 2 + 1,$$

applicando la (1.10), possiamo scrivere

$$5^3 = 5^{(2+1)} = 5^2 \cdot 5.$$

Pertanto sapremo il risultato di 5^3 una volta conosciuto il risultato di 5^2. D'altra parte, sempre dall'operazione di somma, sappiamo che

$$2 = \{0, 1\} = 1 + 1.$$

Allora, applicando ancora la (1.10) e l'Osservazione (1.1), possiamo scrivere

$$5^2 = 5^{(1+1)} = 5^1 \cdot 5 = 5 \cdot 5.$$

In definitiva,

$$5^3 = 5^2 \cdot 5 = 5 \cdot 5 \cdot 5.$$

Osservazione (Proprietà dell'Elevazione a Potenza su $\mathbb{N}$) Comunque considerati $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ risulta:

1. $\ell^{m+n} = \ell^m \cdot \ell^n$;

2. $(\ell^m)^n = \ell^{m \cdot n}$.

Esercizio Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \equiv 0 + 1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esercizio Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 \equiv 0 + 1 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Esercizio Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sum_{k=0}^{n} 2k \equiv 0 + 2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1).$$

Esercizio Provare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta

$$\sum_{k=0}^{n} 2k + 1 \equiv 1 + 3 + \cdots + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Definizione (Segmento Iniziale di $\mathbb{N}$) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ chiamiamo *segmento iniziale* di $\mathbb{N}$ di estremo n il sottoinsieme di $\mathbb{N}$

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}.$$

Definizione (Ordinamento su $\mathbb{N}$) Dati $m, n \in \mathbb{N}$ diciamo che n è *maggiore o uguale* ad n e scriviamo

$$n \geq m$$

se

$$\{0, 1, \ldots, m\} \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Proposizione Dati $m, n \in \mathbb{N}$ risulta $n \geq m$ se e solo se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$m + k = n.$$

Osservazione (Proprietà dell'Ordinamento su $\mathbb{N}$) Comunque considerati $\ell, n, m \in \mathbb{Z}$, risulta:

1. $n \geq n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (proprietà riflessiva);

3. $n \geq m \quad \wedge \quad m \geq n \quad \Rightarrow \quad m = n$, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ (proprietà antisimmetrica in senso lato);

2. $m \geq \ell \quad \wedge \quad n \geq m \quad \Rightarrow \quad n \geq \ell$, per ogni $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ (proprietà transitiva)

Osservazione (Totalità dell'Ordinamento) Comunque considerati $m, n \in \mathbb{N}$ vale sempre una ed una sola tra.le due condizioni seguenti

$$n \geq m, \quad m \geq n.$$

Definizione (Ordinamento Stretto su $\mathbb{N}$) Dati $m, n \in \mathbb{N}$ diciamo che n è (*strettamente*) *maggiore* di m e scriviamo

$$n > m$$

se

$$n \geq m \quad \wedge \quad n \neq m.$$

In altri termini se $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ tale che

$$n = m + k.$$

Esercizio Individuare con notazione estensiva il sottoinsieme di numeri naturali

$$\left\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 + 1 = 0\right\}.$$

Esercizio Provare che per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ risulta

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

Esercizio Provare che per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ risulta

$$n^n \geq n!.$$

1.2 Insieme dei Numeri Interi Relativi

Assumiamo come noto l'insieme dei numeri interi relativi $\mathbb{Z} \equiv \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$

Definizione (Sottoinsiemi degli Interi Positivi e Negativi) Chiamiamo $\mathbb{Z}_+ \equiv \{0, +1, +2, \dots\}$ [risp. $\mathbb{Z}_- \equiv \{0, -1, -2, \dots\}$] sottoinsieme degli *interi positivi* [risp. *interi negativi*] di $\mathbb{Z}$. Chiamiamo $\mathbb{Z}_{++} \equiv \{+1, +2, \dots\}$ [risp. $\mathbb{Z}_{--} \equiv \{-1, -2, \dots\}$] sottoinsieme degli *interi strettamente positivi* [risp. *interi strettamente negativi*] di $\mathbb{Z}$.

Definizione (Opposto) Per ogni $z \in \mathbb{Z} - \{0\}$ chiamiamo *opposto* di z il numero intero $-z$. Conveniamo inoltre che l'opposto dell'intero 0 sia 0 stesso.

Osservazione Comunque considerato $z \in \mathbb{Z}$ risulta:

$$\begin{array}{ll} -z \in \mathbb{Z}_{--} & \text{se } z \in \mathbb{Z}_{++}, \\ -z \in \mathbb{Z}_{++} & \text{se } z \in \mathbb{Z}_{--}. \end{array}$$

Definizione (Valore Assoluto su $\mathbb{Z}$) Per ogni $z \in \mathbb{Z}$ chiamiamo *valore assoluto* di z, e lo denotiamo con $|z|$ il numero intero positivo definito ponendo

$$|z| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z & \text{se } z \in \mathbb{Z}_+ \\ -z & \text{se } z \in \mathbb{Z}_- \end{cases}.$$

Ossevazione (Prime Proprietà del Valore Assoluto su $\mathbb{Z}$) Comunque considerato $z \in \mathbb{Z}$ risulta:

1. $|z| \in \mathbb{Z}_+$

2. $|z| = |-z|$.

Definizione (Operazione di Somma su $\mathbb{Z}$) In questa sede ci limitiamo a dare una "definizione intuitiva" dell'operazione di somma su $\mathbb{Z}$. Allo scopo, osserviamo che fissati su una retta un'origine, un verso di percorrenza ed un'unità di misura, il numero intero nullo è naturalmente associato con l'origine della retta ed i numeri interi strettamente positivi [risp. negativi] con i punti individuati dai multipli dell'unità di misura a destra [risp. a sinistra] dell'origine. Allora, comunque considerati $x, y \in \mathbb{Z}$, volendo definire la loro somma $x + y$ si individua il punto sulla retta corrispondente all'intero x e si avanza [risp. si indietreggia] di un numero di passi pari a $|z|$.

Osservazione (Proprietà della Somma su $\mathbb{Z}$) Comunque considerati $x, y, z \in \mathbb{Z}$, risulta:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (proprietà associativa);

2. $y + z = y + z$ (proprietà commutativa);

3. $z + 0 = 0 + z = z$ (esistenza di un elemento neutro, l'elemento zero, per la somma);

4. $z + (-z) = (-z) + z = 0$ (esistenza di un simmetrico, l'opposto, di ogni elemento per la somma).

Notazione Comunque considerati $x, y, z \in \mathbb{Z}$, stante la proprietà associativa della sommma, la scrittura $x+y+z$ non presenta ambiguità interpretative.

Definizione (Operazione di Prodotto su $\mathbb{Z}$) ...

Osservazione (Proprietà del Prodotto su $\mathbb{Z}$) Comunque considerati $x, y, z \in \mathbb{Z}$, risulta:

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (proprietà associativa);

2. $y \cdot z = z \cdot y$ (proprietà commutativa);

3. $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$ (esistenza di un elemento neutro per il prodotto).

Notazione Comunque considerati $x, y, z \in \mathbb{Z}$, stante la proprietà associativa del prodotto, la scrittura $x \cdot y \cdot z$ non presenta ambiguità interpretative.

Osservazione (Proprietà Distributiva del Prodotto rispetto alla Somma su $\mathbb{Z}$) Comunque considerati $x, y, z \in \mathbb{Z}$, risulta:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Osservazione Per ogni $z \in \mathbb{Z}$ poniamo

$$-z \stackrel{\text{def}}{=} (-1) \cdot z.$$

Osservazione (Valore Assoluto e Prodotto su $\mathbb{Z}$) Comunque considerati $y, z \in \mathbb{Z}$, risulta:

$$|y \cdot z| = |y| \cdot |z| \,.$$

Definizione (Operazione di Elevazione a Potenza su $\mathbb{Z}$) Comunque considerato $z \in \mathbb{Z}$, poniamo

$$z^n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ z^n & \text{se } z \in \mathbb{Z}_+, \\ (-z)^n & \text{se } z \in \mathbb{Z}_- \text{ ed } n \in \mathbb{P}, \\ -(-z)^n & \text{se } z \in \mathbb{Z}_- \text{ ed } n \in \mathbb{D}. \end{cases}$$

Osservazione (Proprietà dell'Elevazione a Potenza su $\mathbb{Z}$) Comunque considerati $y, z \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N}$ risulta:

1. $z^{m+n} = z^m \cdot z^n$;

2. $(z^m)^n = z^{m \cdot n}$;

3. $(y \cdot z)^n = y^n \cdot z^n$.

Definizione (Ordinamento su $\mathbb{Z}$) Dati $y, z \in \mathbb{Z}$ diciamo che z è *maggiore o uguale* ad y e scriviamo

$$z \geq y$$

se e solo se esiste $k \in \mathbb{Z}_+$ tale che

$$z = y + k.$$

In particolare, $z \geq 0$ se e solo se $z \in \mathbb{Z}_+$.

Osservazione Comunque considerati $y, z \in \mathbb{Z}$ risulta $z \geq y$ se e solo se $z - y \in \mathbb{Z}_+$.

Osservazione (Proprietà dell'Ordinamento su $\mathbb{Z}$) Comunque considerati $x, y, z \in \mathbb{Z}$, risulta:

1. $z \geq z$ per ogni $z \in \mathbb{Z}$ (proprietà riflessiva);

3. $z \geq y \quad \wedge \quad y \geq z \quad \Rightarrow \quad y = z$, per ogni $y, z \in \mathbb{Z}$ (proprietà antisimmetrica in senso lato);

2. $y \geq x \quad \wedge \quad z \geq y \quad \Rightarrow \quad z \geq x$, per ogni $x, y, z \in \mathbb{Z}$ (proprietà transitiva)

Osservazione (Totalità dell'Ordinamento) Comunque considerati $y, z \in \mathbb{Z}$ vale sempre una ed una sola tra.le due condizioni seguenti

$$z \geq y, \quad y \geq z.$$

Osservazione (Relazioni tra Ordinamento ed Operazione di Somma su $\mathbb{Z}$) Comunque considerati $y, z \in \mathbb{Z}_+$ risulta

$$y + z \in \mathbb{Z}_+.$$

Osservazione Comunque considerati $y, z \in \mathbb{Z}_+$ risulta

$$y \cdot z \in \mathbb{Z}_+.$$

Più in generale

$$y \cdot z \in \mathbb{Z}_+ \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{sgn}(y) = \operatorname{sgn}(z),$$

essendo $\operatorname{sgn}(y)$, $\operatorname{sgn}(z)$ i segni di y e di z, rispettivamente.

Definizione (Ordinamento Stretto su $\mathbb{Z}$) Dati $y, z \in \mathbb{Z}$ diciamo che z è (*strettamente*) *maggiore* di y e scriviamo

$$z > y$$

se

$$z \geq y \quad \wedge \quad z \neq y.$$

In altri termini se esiste $k \in \mathbb{Z}_{++}$ tale che

$$z = y + k.$$

In particolare, $z > 0$ se e solo se $z \in \mathbb{Z}_{++}$.

Osservazione (Valore Assoluto ed Ordinamento su $\mathbb{Z}$) Comunque considerati $y, z \in \mathbb{Z}$, risulta:

$$|y \cdot z| \leq |y| + |z|.$$

Esercizio Determinare i sottoinsiemi di numeri interi relativi individuati dalle relazioni

$$\{z \in \mathbb{Z} \mid z - 5 \geq 0\},$$
$$\{z \in \mathbb{Z} \mid z - 5 < 0\},$$
$$\{z \in \mathbb{Z} \mid z + 1 \geq 0\},$$
$$\{z \in \mathbb{Z} \mid z + 1 > 0\},$$
$$\{z \in \mathbb{Z} \mid z + 1 < 0\}.$$

Esercizio Determinare i sottoinsiemi di numeri interi relativi individuati dalle notazioni

$$\{z \in \mathbb{Z} \mid z^2 - 11z + 28 = 0\},$$
$$\{z \in \mathbb{Z} \mid z^2 - 11z + 28 \geq 0\},$$
$$\{z \in \mathbb{Z} \mid z^2 - 11z + 28 < 0\}.$$

1.3 Insieme dei Numeri Razionali

Assumiamo come noto l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q} \equiv \{q \mid q = \frac{z}{n},\ z \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$

Definizione (Sottoinsieme dei Razionali Positivi e Negativi) Chiamiamo $\mathbb{Q}_{+} \equiv \{q \mid q = \frac{z}{n},\ z \in \mathbb{Z}_{+},\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ [risp. $\mathbb{Q}_{-} \equiv \{q \mid q = \frac{z}{n},\ z \in \mathbb{Z}_{-},\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$] sottoinsieme dei *razionali positivi* [risp. *negativi*] di $\mathbb{Q}$. Chiamiamo $\mathbb{Q}_{++} \equiv \{q \mid q = \frac{z}{n},\ z \in \mathbb{Z}_{++},\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ [risp. $\mathbb{Q}_{--} \equiv \{q \mid q = \frac{z}{n},\ z \in \mathbb{Z}_{--},\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$] sottoinsieme dei *razionali strettamente positivi* [risp.*strettamente negativi*] di $\mathbb{Q}$.

Definizione (Opposto) Per ogni $q \in \mathbb{Q}$ tale che $q = \frac{z}{n}$, con $z \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ chiamiamo *opposto* di q lo indichiamo con la notazione $-q$ il numero razionale

$$-q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{-z}{n}.$$

Conveniamo inoltre che l'opposto del razionale 0 sia 0 stesso.

Definizione (Reciproco) Per ogni $q \in \mathbb{Q}-\{0\}$ tale che $q = \frac{z}{n}$, con $z \in \mathbb{Z}-\{0\}$ e $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ chiamiamo *reciproco* di q lo indichiamo con la notazione $1/q$ il numero razionale

$$1/q \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{ll} \frac{n}{z} & \text{se } z \in \mathbb{Z}_{++} \\ -\frac{n}{-z} & \text{se } z \in \mathbb{Z}_{--} \end{array}.$$

Conveniamo inoltre che il razionale 0 non abbia reciproco.

Definizione (Operazione di Somma su $\mathbb{Q}$) Comunque considerati $p, q \in \mathbb{Q}$, tali che $p = \frac{y}{m}$, $q = \frac{z}{n}$ dove $y, z \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$ poniamo

$$p + q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y\frac{\text{m.c.m.}(m,n)}{m} + z\frac{\text{m.c.m.}(n,n)}{n}}{\text{m.c.m.}(m,n)},$$

essendo m.c.m.(m, n) il minimo comune multiplo tra m ed n.

Osservazione (Proprietà della Somma su $\mathbb{Q}$) Comunque considerati $p, q, r \in \mathbb{Q}$, risulta:

1. $(p + q) + r = p + (q + r)$ (proprietà associativa);

2. $p + q = q + p$ (proprietà commutativa);

3. $q + 0 = 0 + q = q$ (esistenza di un elemento neutro, l'elemento zero, per la somma);

4. $q + (-q) = (-q) + q = 0$ (esistenza di un simmetrico, l'opposto, di ogni elemento per la somma).

Notazione Comunque considerati $p, q, r \in \mathbb{Q}$, stante la proprietà associativa della sommma, la scrittura $p+q+r$ non presenta ambiguità interpretatrive.

Definizione (Operazione di Prodotto su $\mathbb{Q}$) Comunque considerati $p, q \in \mathbb{Q}$, tali che $p = \frac{y}{m}$, $q = \frac{z}{n}$ dove $y, z \in \mathbb{Z}$, $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$ poniamo

$$p \cdot q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y \cdot z}{m \cdot n},$$

Osservazione (Proprietà dell'Operazione di Prodotto su $\mathbb{Q}$) Comunque considerati $p, q, r \in \mathbb{Q}$, risulta:

1. $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$ (proprietà associativa);

2. $p \cdot q = q \cdot p$ (proprietà commutativa);

3. $q \cdot 1 = 1 \cdot q = q$ (esistenza di un elemento neutro, l'elemento uno, per il prodotto);

4. $q \cdot \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{q} \cdot q = 1$ (esistenza di un elemento simmetrico, il reciproco, di ogni elemento per il prodotto).

Notazione Comunque considerati $p, q, r \in \mathbb{Q}$, stante la proprietà associativa del prodotto, la scrittura $p \cdot q \cdot r$ non presenta ambiguità interpretatrive.

Osservazione (Proprietà Distributiva del Prodotto rispetto alla Somma su $\mathbb{Q}$) Comunque considerati $p, q, r \in \mathbb{Q}$, risulta:

$$p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r.$$

Definizione (Valore Assoluto) Analogamente al caso dei Numeri Interi...

Definizione (Operazione di Elevazione a Potenza su $\mathbb{Q}$) Analogamente al caso dei Numeri Interi...

Osservazione (Proprietà dell'Elevazione a Potenza su $\mathbb{Q}$) Analogamente al caso dei Numeri Interi ...

Definizione (Ordinamento su $\mathbb{Q}$) Dati $p, q \in \mathbb{Q}$ diciamo che q è *maggiore o uguale* ad p e scriviamo

$$q \geq p$$

se esiste $k \in \mathbb{Z}_{++}$ tale che

$$q = p + k.$$

In particolare, $q \geq 0$ se e solo se $q \in \mathbb{Q}_+$.

Osservazione Comunque considerati $p, q \in \mathbb{Q}$ risulta $q \geq p$ se e solo se $q - p \in \mathbb{Q}_+$

Osservazione (Proprietà dell'Ordinamento su $\mathbb{Q}$) Comunque considerati $p, q, r \in \mathbb{Q}$:

1. $q \geq q$ (proprietà riflessiva);

3. $q \geq p \quad \wedge \quad p \geq q \quad \Rightarrow \quad p = q$, (proprietà antisimmetrica in senso lato);

2. $q \geq p \quad \wedge \quad r \geq q \quad \Rightarrow \quad r \geq q$, per ogni $p, q, r \in \mathbb{Q}$ (proprietà transitiva)

Osservazione (Totalità dell'Ordinamento) Per ogni $p, q \in \mathbb{Q}$ vale sempre una ed una sola tra.le due condizioni seguenti

$$q \geq p, \quad p \geq q.$$

Definizione (Ordinamento Stretto su $\mathbb{Q}$) Dati $p, q \in \mathbb{Z}$ diciamo che q è (*strettamente*) *maggiore* di p e scriviamo

$$q > p$$

se

$$q \geq p \quad \wedge \quad q \neq p.$$

In altri termini se esiste $k \in \mathbb{Q}_{++}$ tale che

$$q = p + k.$$

In particolare, $q > 0$ se e solo se $q \in \mathbb{Q}_{++}$.

1.3.1 La Retta Razionale

Osservazione (Incompletezza di $\mathbb{Q}$) Non esiste alcun $q \in \mathbb{Q}$ tale che

$$q^2 = 2.$$

Infatti, supponendo per assurdo l'esistenza di un tale q, potremmo chiaramente scrivere

$$q = \frac{m}{n}$$

con $m \in \mathbb{N}$, ed $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ scelti in modo che m.c.d.$(m, n) = 1$. Dovremmo allora avere

$$q^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2,$$

ossia

$$m^2 = 2n^2.$$

Si avrebbe quindi che m^2 è pari, ma allora anche m dovrebbe essere pari (il quadrato di un naturale dispari è dispari) e quindi

$$m = 2k$$

per un opportuno $k \in \mathbb{N}$. Come conseguenza

$$m^2 = 4k^2 = 2n^2,$$

ossia

$$2k^2 = n^2.$$

Pertanto anche n^2 dovrebbe essere pari e quindi anche n. In definitiva m ed n dovrebbero essere entrambi pari e ciò è in contraddizione con l'averli scelti in modo che m.c.m.$(m, n) = 1$. L'assurdo deriva dall'aver supposto l'esistenza di $q \in \mathbb{Q}$ tale da soddisfare la condizione $q^2 = 1$. Non rimane che concludere che l'Osservazione è vera.

1.4 Insieme dei Numeri Reali

Assumiamo come "noto" l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Definizione Diciamo che una successione $(q_n)_{n\geq 0}$ di numeri razionali è una *successione di Cauchy*, se comunque considerato $\varepsilon > 0$ esiste $\ell_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m, n > \ell_\varepsilon$ risulta:

$$|q_n - q_m| < \varepsilon.$$

Esempio La successione $(q_n)_{n\geq 0}$ definita ponendo

$$q_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

è una successione di Cauchy.

Esempio La successione $(q_n)_{n\geq 0}$ definita ponendo

$$q_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \quad q_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{14}{10}, \quad q_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{141}{10^2}, \quad q_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1414}{10^3},$$
$$q_4 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{14142}{10^4}, \quad q_5 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{141421}{10^5}, \quad q_6 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1414213}{10^6}, \ldots$$

è una successione di Cauchy.

Esempio La successione $(q_n)_{n\geq 0}$ definita ponendo

$$q_n \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

è una successione di Cauchy.

Esempio La successione $(q_n)_{n\geq 0}$ definita ponendo

$$q_0 \stackrel{\text{def}}{=} 3, \quad q_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{31}{10}, \quad q_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{314}{10^2}, \quad q_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3141}{10^3},$$
$$q_4 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{31415}{10^4}, \quad q_5 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{314159}{10^5}, \quad q_6 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{3141592}{10^6}, \ldots$$

è una successione di Cauchy.

Osservazione Comunque considerate due successioni di Cauchy di numeri razionali, $(q_n)_{n\geq 0}$, $(r_n)_{n\geq 0}$, le successioni $(s_n)_{n\geq 0}$ e $(p_n)_{n\geq 0}$ rispettivamente definite ponendo

$$s_n \stackrel{\text{def}}{=} q_n + r_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$p_n \stackrel{\text{def}}{=} q_n \cdot r_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

sono di Cauchy.

Definizione Le successioni $(s_n)_{n\geq 0}$ e $(p_n)_{n\geq 0}$ sono chiamate rispettivamente *somma* e *prodotto* delle successioni $(q_n)_{n\geq 0}$ ed $(r_n)_{n\geq 0}$.

Definizione Dati $x \in \mathbb{R}$ e una successione $(q_n)_{n\geq 0}$ di numeri razionali , diciamo che la successione $(q_n)_{n\geq 0}$ *converge* ad x.se accade che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ risulta:

$$|x - q_n| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esempio La successione dell'Esempio (1.4) converge a 0.

Esempio La successione dell'Esempio (1.4) converge a $\sqrt{2}$.

Esempio La successione dell'Esempio (1.4) converge al numero di Neper e.

Esempio La successione dell'Esempio (1.4) converge a π.

Osserazione Se una successione $(q_n)_{n\geq 0}$ di numeri razionali *converge* ad un $x \in \mathbb{R}$ tale x è unico.

Osservazione Se una successione $(q_n)_{n\geq 0}$ di numeri razionali *converge* ad un $x \in \mathbb{R}$ allora tale successione è di Cauchy.

Teorema (Proprietà Fondamentale dei Numeri Reali) Comunque considerato $x \in \mathbb{R}$ è sempre possibile costruire una successione di Cauchy $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri razionali che converge ad xM. Viceversa, comunque considerata una successione di Cauchy $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri razionali tale esiste un unico $x \in \mathbb{R}$ cui la successione converge.

Notazioni (Sottoinsiemi dei Reali Positivi e Negativi) Denotiamo con $\mathbb{R}_+$ [risp. con $\mathbb{R}_-$] l'insieme dei numeri reali *positivi* [risp. *negativi*]. Inoltre sequendo una prassi diffusa nella letteratura economico-matematica, denoteremo con $\mathbb{R}_{++}$ [risp. con $\mathbb{R}_{--}$] l'insieme dei numeri reali *strettamente positivi* [risp. *strettamente negativi*].

Definizione (Operazione di Somma su $\mathbb{R}$) Comunque considerati $x, y \in \mathbb{R}$ siano $(q_n)_{n\geq 0}$, $(r_n)_{n\geq 0}$ due successioni di Cauchy di numeri razionali convergenti ad x ed y rispettivamente. Chiamiamo *somma* di x ed y e lo denotiamo con $x + y$ il numero reale cui converge la somma delle successioni $(q_n)_{n\geq 0}$ ed $(r_n)_{n\geq 0}$.

Esempio Con riferimento agli Esempi (1.4) e (1.4). Chiamiamo somma di e e π, e lo denotiamo con $e+\pi$, il numero reale cui converge la successione di Cauchy $(q_n)_{n\geq 0}$ definita ponendo

$$q_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1+3, \quad q_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{14}{10}+\frac{31}{10}, \quad q_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{141}{10^2}+\frac{314}{10^2},$$
$$q_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1414}{10^3}+\frac{3141}{10^3}, \quad q_4 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{14142}{10^4}+\frac{31415}{10^4}, \ldots$$

Osservazione (Proprietà della Somma su $\mathbb{R}$) Comunque considerati $x, y, z \in \mathbb{R}$, risulta:

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$ (proprietà associativa);

2. $x+y = y+x$ (proprietà commutativa);

3. $x+0 = 0+x = x$ (esistenza di un elemento neutro, *zero*, per la somma);

4. $x+(-x) = (-x)+x = 0$ (esistenza di un simmetrico, *opposto*, di ogni elemento per la somma).

Notazione Comunque considerati $x, y, z \in \mathbb{R}$, stante la proprietà associativa della sommma, la scrittura $x+y+z$ non presenta ambiguità interpretatrive.

Definizione (Operazione di Prodotto su $\mathbb{R}$) Comunque considerati $x, y \in \mathbb{R}$ siano $(q_n)_{n\geq 0}$, $(r_n)_{n\geq 0}$ due successioni di Cauchy di numeri razionali convergenti ad x ed y rispettivamente. Chiamiamo *prodotto* di x ed y e lo denotiamo con $x \cdot y$ il numero reale cui converge il prodotto delle successioni $(q_n)_{n\geq 0}$ ed $(r_n)_{n\geq 0}$.

Esempio Con riferimento agli Esempi (1.4) e (1.4). Chiamiamo prodotto di e e π, e lo denotiamo con $e \cdot \pi$, il numero reale cui converge la successione di Cauchy $(q_n)_{n\geq 0}$ definita ponendo

$$q_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1\cdot 3, \quad q_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{14}{10}\cdot\frac{31}{10}, \quad q_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{141}{10^2}\cdot\frac{314}{10^2},$$
$$q_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1414}{10^3}\cdot\frac{3141}{10^3}, \quad q_4 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{14142}{10^4}\cdot\frac{31415}{10^4}, \ldots$$

Osservazione (Proprietà del Prodotto su $\mathbb{R}$) Comunque considerati $x, y, z \in \mathbb{R}$, risulta:

1. $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ (proprietà associativa);

2. $x\cdot y = y\cdot x$ (proprietà commutativa);

3. $x\cdot 1 = 1\cdot x = x$ (esistenza di un elemento neutro, *uno*, per il prodotto);

4. $x\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}\cdot x = 1$ (esistenza di un elemento simmetrico, *reciproco*, di ogni elemento per il prodotto).

Notazione Comunque considerati $x, y, z \in \mathbb{R}$, stante la proprietà associativa del prodotto, la scrittura $x \cdot y \cdot z$ non presenta ambiguità interpretatrive.

Teorema (Esistenza della Radice Aritmetica su $\mathbb{R}$) Per ogni $y \in \mathbb{R}_+$ ed ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un unico $x \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$x^n = y. \tag{1.11}$$

Esempio L'elemento $x \in \mathbb{R}_+$ cui converge la successione di Cauchy $(q_n)_{n\geq 0}$ di cui all'Esempio (1.4) gode della proprietà

$$x^2 = 2.$$

Per rendersi conto di ciò si consderi la successione $(p_n)_{n\geq 0}$ definita ponendo

$$p_n = q_n^2,$$

Ossia

$$p_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1, \quad p_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{14^2}{10^2}, \quad p_2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{141^2}{10^4}, \quad p_3 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1414^2}{10^6},$$
$$q_4 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{14142^2}{10^8}, \quad q_5 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{141421^2}{10^{10}}, \quad q_6 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1414213^2}{10^{12}}, \ldots$$

Non è difficile rendersi conto che tale successione converge a 2.

Definizione (Radice Aritmetica su $\mathbb{R}$) Per ogni $y \in \mathbb{R}_+$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'elemento $x \in \mathbb{R}_+$ soluzione dell'Equazione (1.11) è chiamato *radice aritmetica n-esima* di y ed è denotato con il simbolo $\sqrt[n]{y}$.

Esempio L'elemento $x \in \mathbb{R}_+$ soluzione dell'equazione $y^2 = 2$ è chiamato *radice aritmetica quadrata* di 2 ed è denotato con il simbolo $\sqrt{2}$.

Osservazione (Proprietà della Radice Aritmetica su $\mathbb{R}$) Comunque considerati $y, z \in \mathbb{R}_+$, ed $m, n \in \mathbb{N}$ risulta:

1. $\sqrt[n]{y^m} = (\sqrt[n]{y})^m$

2. $\sqrt[n]{y} \cdot \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{y \cdot z}$

Definizione (Operazione di Elevazione a Potenza ad Esponente Razionale su $\mathbb{R}$) Comunque considerato $x \in \mathbb{R}_+$ e $q \in \mathbb{Q}$ tale che $q = \frac{z}{n}$ dove $z \in \mathbb{Z}$ ed $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$x^q \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{x^z},$$

essendo

$$x^z \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{z\text{-volte}} & \text{se } z \in \mathbb{Z}_{++} \\ 1 & \text{se } z = 0 \\ \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{x}}_{-z\text{-volte}} & \text{se } z \in \mathbb{Z}_{--} \end{cases}.$$

Osservazione Sia $(q_n)_{n\geq 0}$ una successione di Cauchy di numeri razionali. Comunque considerato $x \in \mathbb{R}_+$ la successione $(p_n)_{n\geq 0}$ definita ponendo

$$p_n \stackrel{\text{def}}{=} x^{q_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

è di Cauchy.

Elevazione a Potenza ad Esponente Reale su $\mathbb{R}$) Comunque considerati $a \in \mathbb{R}_+$ ed $x \in \mathbb{R}$ sia $(q_n)_{n\geq 0}$ una successione di Cauchy di numeri razionali convergente ad x (una tale successione esiste sempre cfr 1.4). Chiamiamo *esponenziale* in base a di x, e lo denotiamo con in simbolo a^x, il numero reale cui converge la successione di Cauchy $(p_n)_{n\geq 0}$ definita ponendo

$$p_n \stackrel{\text{def}}{=} x^{q_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esempio Chiamiamo esponenziale in base 2 di $\sqrt{2}$, e lo denotiamo con $2^{\sqrt{2}}$ il numero reale cui converge la successione di Cauchy $(p_n)_{n\geq 0}$ definta ponendo

$$p_0 \stackrel{\text{def}}{=} 2^1, \quad p_1 \stackrel{\text{def}}{=} 2^{\frac{14}{10}}, \quad p_2 \stackrel{\text{def}}{=} 2^{\frac{141}{10^2}}, \quad p_3 \stackrel{\text{def}}{=} 2^{\frac{1414}{10^3}},$$
$$p_4 \stackrel{\text{def}}{=} 2^{\frac{14142}{10^4}}, \quad p_5 \stackrel{\text{def}}{=} 2^{\frac{141421}{10^5}}, \quad q_6 \stackrel{\text{def}}{=} 2^{\frac{1414213}{10^6}}, \ldots$$

Osservazione (Proprietà dell'Elevazione a Potenza su $\mathbb{R}$) Comunque coinsiderati $a, b \in \mathbb{R}_+$ ed $x, y \in \mathbb{R}$, risulta

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$;

2. $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$;

3. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

Definizione (Ordinamento su $\mathbb{R}$) Dati $x, y \in \mathbb{R}$ diciamo che y è *maggiore o uguale* ad x e scriviamo

$$y \geq x$$

se

$$y - x \in \mathbb{R}_+.$$

Osservazione (Proprietà dell'Ordinamento su $\mathbb{R}$) Risulta:

1. $x \geq x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (proprietà riflessiva);

3. $y \geq x \quad \wedge \quad y \geq x \quad \Rightarrow \quad x = y$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ (proprietà antisimmetrica in senso lato);

2. $y \geq x \quad \wedge \quad z \geq y \quad \Rightarrow \quad z \geq x$, per ogni $x, y, x \in \mathbb{R}$ (proprietà transitiva)

Osservazione (Totalità dell'Ordinamento) Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ vale sempre una ed una sola tra.le due condizioni seguenti

$$x \geq y, \quad y \geq x.$$

Definizione (Ordinamento Stretto su $\mathbb{R}$) ...