Note di Matematica Generale

Roberto Monte

October 17, 2006

Abstract

These notes are still a work in progress and are intended to be for internal use. Please, don't cite or quote.

Contents

Chapter 1

Elementi di Teoria Elementare delle Relazioni

Siano dati due insiemi non vuoti, X, Y.

Definizione Con il termine *relazione*, o *corrispondenza*, tra X ed Y intendiamo ogni regola ρ che consente di associare ad **alcuni** elementi di X **alcuni** elementi di Y In particolare, quando $X = Y$ si parla di relazione in X.

Notazione Per denotare una relazione tra X ed Y caratterizzata da una generica regola ρ adopereremo il simbolo $\rho : X \to Y$. In particolare scriveremo $\rho : X \to X$ quando $X = Y$. Per indicare che un elemento $y \in Y$ è associato [risp. non è associato] all'elemento $x \in X$ adopereremo la notazione $x\rho y$ [risp. $x \not\rho y$].

Definizione Chiameremo gli insiemi X ed Y rispettivamente *dominio* e *codominio* della relazione. Inoltre, comunque considerato un elemento $x \in X$ chiameremo *immagine* di x mediante ρ e lo denoteremo con il simbolo $\rho(x)$, il sottoinsieme degli elementi di Y associati ad x mediante la regola ρ. In simboli,

$$\rho(x) = \{y \in Y \mid x\rho y\}.$$

Chiaramente

$$x\rho y \iff y \in \rho(x).$$

Definizione (Grafico di Funzione) Chiamiamo grafico della relazione l'insieme

$$\Gamma_\rho \equiv \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in \rho(x)\}\,.$$

Analogamente al caso delle funzioni, è importante notare che gli elementi costitutivi di una relazione sono sia la regola associativa ρ che gli insiemi di riferimento X ed Y. Pertanto modificando uno qualsiasi di tali elementi si ottiene una relazione differente. Inoltre, per definire una relazione tra un insieme

X ed un insieme Y è essenziale che la regola impiegata permetta di associare gli elementi di X ad i loro corrispondenti in Y senza ambiguità. D'altra parte, a differenza del caso delle funzioni, non è da escludere che per taluni elementi $x \in X$ il sottoinsieme $\rho(x)$ degli elementi di Y corrispondenti ad x mediante la regola associativa ρ possa essere vuoto, o contenere più elementi. Così come non è da escludere che possano esistere elementi $y \in Y$ che non corrispondono ad alcun elemento $x \in X$ o che corrispondono a più elementi $x \in X$.

Osservazione Se per ogni elemento $x \in X$ l'insieme $\rho(x)$ contiene sempre uno ed un solo elemento, allora la relazione $\rho : X \to Y$ costituisce una funzione.

Esempio Sia X l'insieme di tutte le donne viventi, sia Y l'insieme di tutti gli uomini viventi e sia ρ la regola associativa data da

$$x\rho y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{“}x \text{ è madre di } y\text{”}, \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

La regola ρ consente di definire una relazione tra X ed Y.

Commento Mater semper nota est.... Quindi la suddetta regola è definita senza ambiguità. Tuttavia si noti che la stessa non definisce una funzione in quanto accade che ad alcuni elementi del dominio non corrisponda alcun elemento del codominio (donne senza figli) ed ad alcuni elementi del dominio corrispondano più elementi del codominio (donne con più figli).

Esempio Sia $X = Y$ l'insieme di tutti gli uomini viventi e sia ρ la regola associativa data da

$$x\rho y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{“}x \text{ è il padre di } y\text{”}, \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

La regola ρ non consente di definire una relazione tra X ed Y.

Commento ...pater non semper! La saggezza degli antichi romani suggerisce che la suddetta regola possa presentare alcune ambiguità e quindi non si presta a definire una relazione (in senso strettamente matematico del termine).

Esempio Sia X l'insieme di tutti gli uomini viventi sia Y l'insieme di tutte le donne viventi e sia ρ la regola associativa data da

$$x\rho y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{“}x \text{ è il ragazzo di } y\text{”}, \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

La regola ρ non consente di definire una relazione tra X ed Y.

Commento Sfortunatamente talvolta accade che un caio sia sinceramente convinto di essere il ragazzo di una tizia, mentre a quest'ultima la cosa non risulta proprio!

Esempio Sia X l'insieme di tutti gli uomini viventi, sia Y l'insieme di tutte le donne viventi e sia ρ la regola associativa data da

$$x\rho y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{“}x \text{ è marito di } y\text{”}, \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

La regola ρ consente di definire una relazione tra X ed Y.

Commento Carta canta! Il matrimonio è un atto legale e come tale definibile senza ambiguità. D'altra parte la relazione considerata non è una funzione in quanto esistono uomini non sposati (per loro fortuna!) ed anche uomini con più mogli (povracci!). Ovviamente esistono donne senza marito ed interessante è anche notare che in alcune comunità umane esistono donne con più mariti (come tra la popolazione Nayar abitante le coste del Malabar in India).

Esempio Sia X l'insieme di tutti i giocatori di calcio Italiani in attività, sia $Y = X$ e sia ρ la regola associativa data da

$$x\rho y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{“}x \text{ è più bravo di } y\text{”}, \quad \forall x \in X, y \in Y.$$

La regola ρ non consente di definire una relazione tra X ed Y.

Commento Pare infatti che purtroppo ci sia una certa difficoltà nello stabilire se Totti sia meglio o peggio di Del Piero.

Rivolgendosi più saggiamente ad esempi di natura matematica...

Esempio (Divisibilità in $\mathbb{N}$) Sia $X = Y \equiv \mathbb{N}$ e sia ρ la regola associativa data da

$$m\rho n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} n = k \cdot m, \ k \in \mathbb{N}, \quad \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

La regola ρ consente di definire una relazione in $\mathbb{N}$, comunemente nota come relazione di *divisibilità* in $\mathbb{N}$. Per indicare che l'elemento m è associato ad n secondo tale regola si adopera comunemente il simbolo $m|n$ che viene letto “m *divide* n”, o anche “n è *multiplo* di m”.

Esempio (Ordinamento Canonico Crescente in $\mathbb{R}$) Sia $X = Y \equiv \mathbb{R}$ e sia ρ la regola associativa data da

$$x\rho y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{“}x - y \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

La regola ρ consente di definire una relazione in $\mathbb{R}$, comunemente nota come *ordinamento (canonico) crescente* in $\mathbb{R}$. Per indicare che l'elemento x è associato ad y secondo tale regola si adopera comunemente il simbolo $x \geq y$ che viene letto “x è *maggiore o uguale* ad y”.

Esempio (Ordinamento Canonico Decrescente in $\mathbb{R}$) Sia $X = Y \equiv \mathbb{R}$ e sia ρ la regola associativa data da

$$x\rho y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{“}y - x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

La regola ρ consente di definire una relazione in $\mathbb{R}$, comunemente nota come *ordinamento (canonico) decrescente* in $\mathbb{R}$. Per indicare che l'elemento x è associato ad y secondo tale regola si adopera comunemente il simbolo $x \leq y$ che viene letto “x è *minore o uguale* ad y”.

Esempio (Ordinamento Canonico Strettamente Crescente in $\mathbb{R}$) Sia $X = Y \equiv \mathbb{R}$ e sia ρ la regola associativa data da

$$x\rho y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{“}x - y \in \mathbb{R}_{++}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

La regola ρ consente di definire una relazione in $\mathbb{R}$, comunemente nota come *ordinamento (canonico) strettamente crescente* in $\mathbb{R}$. Per indicare che l'elemento x è associato ad y secondo tale regola si adopera comunemente il simbolo $x > y$ che viene letto “x è (*strettamente*) *maggiore di* y”.

Esempio (Ordinamento Canonico Strettamente Decrescente in $\mathbb{R}$) Sia $X = Y \equiv \mathbb{R}$ e sia ρ la regola associativa data da

$$x\rho y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{“}y - x \in \mathbb{R}_{++}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

La regola ρ consente di definire una relazione in $\mathbb{R}$, comunemente nota come *ordinamento (canonico) strettamente decrescente* in $\mathbb{R}$. Per indicare che l'elemento x è associato ad y secondo tale regola si adopera comunemente il simbolo $x < y$ che viene letto “x è (*strettamente*) *minore di* y”.

1.1 Relazioni in un Insieme

Una classe particolarmente importante di relazioni si ha quando il codominio Y coincide con il dominio X. Come già detto, in questo caso si parla di relazioni in X. Per tali relazioni vengono individuate alcune notevoli proprietà:

Definizione Diciamo che una relazione $\rho : X \to X$ è:

Definizione 1 *1.* riflessiva*, se per ogni $x \in X$ risultà $x\rho x$;*

2. antiriflessiva*, se per ogni $x \in X$ risultà $x\not\rho x$;*

3. simmetrica*, se per ogni $x, y \in X$ tali che $x\rho y$ risulta $y\rho x$;*

4. antisimmetrica in senso stretto*, se per ogni $x, y \in X$ tali che $x\rho y$ risulta $y\not\rho x$;*

5. antisimmetrica (in senso lato)*, se per ogni $x, y \in X$ tali che $x\rho y$ e $y\rho x$ risulta $x = y$;*

6. transitiva*, se per ogni $x, y, z \in X$ tali che $x\rho y$ e $y\rho zy$ risulta $x\rho z$.*

Esempio Sia X l'insieme di tutti gli uomini viventi e sia $\rho : X \to X$ la relazione in X data da

$$x\rho y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{“}x \text{ ha la stessa madre di } y\text{”}, \quad \forall x, y \in X.$$

Tale relazione è chiaramente riflessiva, simmetrica e transitiva.

Esempio Sia X l'insieme di tutte le donne viventi e sia $\rho : X \to X$ la relazione in X data da

$$x\rho y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{“}x \text{ è madre di } y\text{”}, \quad \forall x, y \in X.$$

Tale relazione è chiaramente antiriflessiva, antisimmetrica in senso stretto e transitiva.

Esempio (Divisibilità in $\mathbb{N}$) Sia $X \equiv \mathbb{N}$ e sia $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la relazione in $\mathbb{N}$ di cui all'Esempio (1). Tale relazione risulta essere riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Discussione La relazione è chiaramente riflessiva in quanto per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha banalmente $n|n$. Infatti, $n = 1 \cdot n$.

La relazione è antisimmetrica (in senso lato) in quanto considerati due elementi $m, n \in \mathbb{N}$ per i quali valgono entrambe le $m|n$ ed $n|m$ deve aversi

$$n = k \cdot m \quad \text{e} \quad m = j \cdot n,$$

per opportuni $j, k \in \mathbb{N}$. Ne segue allora che

$$m = j \cdot (k \cdot m) = (j \cdot k) \cdot m$$

e ciò evidentemente comporta

$$j \cdot k = 1,$$

da cui

$$j = k = 1.$$

In definitiva otteniamo

$$n = m,$$

ossia l'antisimmetria della relazione di divisibilità. Similarmente, per provare che la relazione è transitiva, osserviamo che considerati gli elementi $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ per i quali valgano entrambe le $\ell|m$ ed $m|n$ deve aversi

$$m = j \cdot \ell \quad \text{e} \quad n = k \cdot m,$$

per opportuni $j, k \in \mathbb{N}$. Ne segue allora che

$$n = k \cdot (j \cdot \ell) = (k \cdot j) \cdot \ell,$$

e ciò significa

$$\ell|n,$$

come da provarsi.$\square$

Esempio (Ordinamento Canonico Crescente in $\mathbb{R}$) Sia $X \equiv \mathbb{R}$ e sia $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la relazione in $\mathbb{R}$ di cui all'Esempio (1). Tale relazione risulta essere riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Discussione La relazione è chiaramente riflessiva in quanto per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha banalmente $x \geq x$. Infatti, $x - x = 0 \in \mathbb{R}_+$.Per provare che la relazione è antisimmetrica, osserviamo che considerati due elementi $x, y \in \mathbb{R}$ per i quali valgono entrambe le $x \geq y$ e $y \geq x$ deve aversi

$$x - y \in \mathbb{R}_+ \quad \text{e} \quad y - x \in \mathbb{R}_+.$$

D'altra parte

$$y - x = -(x - y),$$

e l'appartenenza dei due reali opposti $x - y$ e $y - x$ ad $\mathbb{R}_+$ comporta che

$$x - y = y - x = 0,$$

ossia

$$x = y.$$

Infine, per provare che la relazione è transitiva, osserviamo che considerati gli elementi $x, y, z \in \mathbb{N}$ per i quali valgano entrambe le $x \geq y$ ed $y \geq z$ deve aversi

$$x - y \in \mathbb{R}_+ \quad \text{e} \quad y - z \in \mathbb{R}_+.$$

Risulta allora

$$x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{R}_+,$$

ossia

$$x \geq z.$$

Ciò prova la transitività di $\rho : X \to X$.$\square$

Esempio (Ordinamento Canonico Decrescente in $\mathbb{R}$) Sia $X \equiv \mathbb{R}$ e sia $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la relazione in $\mathbb{R}$ di cui all'Esempio (1). Tale relazione risulta essere riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Discussione Esercizio...

Esempio (Ordinamento Canonico Strettamente Crescente in $\mathbb{R}$) Sia $X \equiv \mathbb{R}$ e sia $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la relazione in $\mathbb{R}$ di cui all'Esempio (1). Tale relazione risulta essere antiriflessiva, antisimmetrica in senso stretto e transitiva.

Discussione Esercizio...

Esempio (Ordinamento Canonico Strettamente Decrescente in $\mathbb{R}$) Sia $X \equiv \mathbb{R}$ e sia $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la relazione in $\mathbb{R}$ di cui all'Esempio (1). Tale relazione risulta essere antiriflessiva, antisimmetrica in senso stretto e transitiva.

Discussione Esercizio...

1.2 Relazioni d'Equivalenza

Sia $\rho : X \to X$ una relazione in un insieme X.

Definizione Diciamo che $\rho : X \to X$ è una *relazione d'equivalenza* se $\rho : X \to X$ è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Definizione Se $\rho : X \to X$ è una relazione d'equivalenza in X, comunque considerato un $x \in X$, l'insieme immagine di x,

$$\rho(x) \equiv \{y \in X \mid y\rho x\}$$

è chiamato *ρ-classe d'equivalenza* di rappresentante x.

Proposizione Due ρ-classi d'equivalenza distinte sono disgiunte.

Dimostrazione Supponiamo che due classi d'equivalenza di rappresentanti x ed y abbiano intersezione non vuota, ossia esista esista almeno un elemento $z \in X$ tale che

$$z \in \rho(x) \cap \rho(y).$$

Per tale elemento z deve allora aversi

$$z\rho x \quad \text{e} \quad z\rho y,$$

e, per le proprietà simmetrica e transitiva della relazione d'equivalenza, ne segue

$$x\rho y.$$

Pertanto, riapplicando la proprietà transitiva, si ottiene che ogni elemento della classe $\rho(x)$ è in relazione con y, ossia appartiene alla classe $\rho(y)$. Ciò prova che

$$\rho(x) \subseteq \rho(y).$$

Allo stesso modo, scambiando i ruoli di x ed y si prova che

$$\rho(y) \subseteq \rho(x),$$

ed in definitiva

$$\rho(x) = \rho(y).$$

Cioè due classi non disgiunte coincidono.□

Esempio (Relazione d'Uguaglianza) Sia X un qualsiasi insieme non vuoto e sia $\rho : X \to X$ la relazione in X data da

$$x\rho y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x = y, \quad \forall x, y \in X.$$

Tale relazione è chiaramente una relazione d'equivalenza fondamentale, universalmente nota come *uguaglianza*.

Esempio (Relazione d'Indifferenza) Fissato $n \in \mathbb{N}$, sia $\mathbb{R}^n_+$ il prodotto cartesiano dell'insieme $\mathbb{R}_+$ per sè stesso n-volte. Un elemento $x \in \mathbb{R}^n_+$ è allora una n-pla di numeri reali non negativi $x \equiv (x_1, \dots, x_n)$ e, ad esempio, si presta a rappresentare un possibile paniere di n beni di consumo. Infatti, per $k = 1, \dots, n$, basta considerare ogni componente x_k dell'elemento x come la quantità del k-esimo bene, rispetto ad una unità di misura prefissata, contenuta nel paniere. Sia inoltre $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ una funzione che per ogni paniere di n beni di consumo $x \in \mathbb{R}^n_+$ quantifica il godimento $U(x) \in \mathbb{R}_+$ che un consumatore trae dall'acquisizione del paniere x stesso. Una tale funzione è comunemente nota come *funzione d'utilità* del consumatore. Consideriamo adesso la relazione $\rho : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ data da

$$x \rho y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} U(x) = U(y).$$

Tale relazione è chiaramente una relazione d'equivalenza[1]. Da notare che, per ogni $c \in \mathbb{R}_+$ la controimmagine di c mediante la funzione $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$,

$$U^{-1}(\{c\}) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid U(x) = c\},$$

se non vuota, rappresenta un insieme di panieri degli n beni che presentano lo stesso livello di godimento c per il consumatore. Ossia un insieme di panieri su cui il consumatore non è in grado di operare una scelta potendo acquisire indifferentemente l'uno o l'altro con la stessa soddisfazione. In effetti, tali insiemi sono chiamati gli *insiemi di livello* della funzione $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$, ed, al variare di $c \in \mathbb{R}_+$, individuano le classi di equivalenza della relazione $\rho : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$. In particolare, fissato un qualsiasi $x \in \mathbb{R}^n_+$, la ρ-classe d'equivalenza di rappresentante x è data da

$$\{y \in \mathbb{R}^n_+ \mid U(y) = U(x)\}$$

e costituisce l'insieme di livello della funzione $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ corrispondente alla scelta di $c \equiv U(x)$.

Esercizio (Funzione di Produzione di Cobb-Douglas) Sia $\mathbb{R}^2_+$ il prodotto cartesiano dell'insieme dei numeri reali non negativi $\mathbb{R}_+$ per sè stesso. Si assuma che una coppia $(K, L) \in \mathbb{R}^2_+$ rappresenti il numero di ore lavoro e di unità di capitale necessarie alla produzione di Q unità di un dato bene. Si assuma altresì che la quantità Q sia funzione del capitale K e della forza lavoro L impiegati secondo la legge di Cobb Douglas

$$Q = cK^\alpha L^\beta$$

dove $c > 0$ è una costante che riassume altre possibili influenze sulla produzione (ad es. l'abilità imprenditoriale e/o la tecnologia che interviene nel processo produttivo) ed α e β sono esponenti costanti. Descrivere le

[1] La prova è immediata e si basa sulla circostanza che $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ è una funzione e pertanto per ogni $x \in \mathbb{R}^n_+$ il valore $U(x) \in \mathbb{R}_+$ è univocamente definito,

curve di indifferenza distinguendo i tre casi $\alpha + \beta = 1$, *rendimenti di scala costanti*, $\alpha + \beta > 1$, *rendimenti di scala crescenti*, $\alpha + \beta < 1$, *rendimenti di scala decrescenti*.

Esercizio Sia $\mathbb{R}^2_+$ il prodotto cartesiano dell'insieme dei numeri reali non negativi $\mathbb{R}_+$ per sè stesso. Un elemento $x \in \mathbb{R}^2_+$ è allora una coppia di numeri reali non negativi $x \equiv (x_1, x_2)$ e si presta a rappresentare un possibile paniere di 2 beni di consumo. Si supponga che la funzione di utilità di un consumatore rispetto all'acquisizione di un paniere di beni così costituito, $U : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$, sia data da

$$U(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x_1 x_2}.$$

Descrivere le curve di indifferenza.

Esercizio Sia $\not{R}^2$ il prodotto cartesiano dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ per sè stesso. Un elemento $x \in \mathbb{R}^2$ è allora una coppia di numeri reali $x \equiv (x_1, x_2)$ e si presta a rappresentare un possibile portafoglio costituito da due titoli (ad es. un portafoglio costituito da x_1 unità di un B.T.P., titolo non rischioso, e da x_2 unità di azioni E.N.I., titolo rischioso) I possibili valori negativi delle singole componenti del portafoglio vanno interpretate come *posizioni short* (*vendite allo scoperto*) sul titolo corrispondente. Si supponga inoltre che il portafoglio sia soggetto al vincolo di bilancio

$$x_1 + x_2 \geq 0$$

e che la funzione di utilità di un operatore finanziario rispetto al possesso di un portafoglio di beni così costituito, $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, sia data da

$$U(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x_1 + x_2}.$$

Descrivere le curve di indifferenza. Hanno tali curve di indifferenza una plausibilità finanziaria? Sapreste immaginare come modificare la funzione d'utilità per ottenere delle curve di indifferenza più plausibili dal punto di vista finanziario?

1.3 Relazioni d'Ordine

Sia X un insieme non vuoto e sia $\rho : X \to X$ una relazione di X in sè.

Definizione (Ordinamento) Diciamo che $\rho : X \to X$ è una *relazione d'ordine* (*in senso lato*) se $\rho : X \to X$ è riflessiva, antisimmetrica (in senso lato) e transitiva.

Definizione (Ordinamento Stretto) Diciamo che $\rho : X \to X$ è una *relazione d'ordine in senso stretto* se $\rho : X \to X$ è antiriflessiva, antisimmetrica in senso stretto e transitiva.

Definizione (Ordinamento Totale) Se $\rho : X \to X$ una relazione di X in sè diciamo che $\rho : X \to X$ è totale se comunque considerati $x, y \in X$ si verifica sempre
$$x\rho y \quad \vee \quad y\rho x.$$

Esempio (Ordinamenti Crescente e Decrescente in $\mathbb{R}$) Sia $X \equiv \mathbb{R}$ e sia $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la relazione in $\mathbb{R}$ di cui all'Esempio (1) (o anche all'Esempio (1)). Tale relazione è una relazione d'ordine totale.

Esempio (Ordinamenti Canonici Strettamente Crescente e Strettamente Decrescente in $\mathbb{R}$) Sia $X \equiv \mathbb{R}$ e sia $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la relazione in $\mathbb{R}$ di cui all'Esempio (1) (o anche all'Esempio (1)). Tale relazione è una relazione d'ordine in senso stretto totale.

Esercizio (Ordinamento Canonico Crescente di Insiemi) Sia $\mathfrak{P}(X)$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di X, e sia $\rho_\cup : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ la relazione data da

$$A\rho_\cup B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \cup B = B$$

Provare che tale relazione è una relazione d'ordine (in senso lato) non totale in $\mathfrak{P}(X)$. Più precisamente la relazione $\rho_\cup : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ costituisce l'ordinamento canonico crescente $\subseteq$ in $\mathfrak{P}(X)$.

Esercizio (Ordinamento Canonico Decrescente di Insiemi) Sia $\mathfrak{P}(X)$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di X, e sia $\rho_\cup : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ la relazione data da
$$A\rho_\cap B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \cap B = B$$

Provare che tale relazione è una relazione d'ordine (in senso lato) non totale in $\mathfrak{P}(X)$. Più precisamente la relazione $\rho_\cap : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ costituisce l'ordinamento canonico decrescente $\supseteq$ in $\mathfrak{P}(X)$.

Esempio Con riferimento all'Esempio (1.2), sia $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ la funzione d'utilità di un consumatore. Consideriamo quindi la relazione $\rho_U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ data da
$$x\rho_U y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} U(x) \geq U(y), \quad \forall x, y \in X.$$

E' immediato verificare che tale relazione è riflessiva e transitiva. Poniamoci quindi poi il problema se $\rho_U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ sia antisimmetrica in senso lato, ossia se per ogni comunque considerati $x, y \in X$ per i quali si abbia sia $x\rho y$ che $y\rho x$ risulti $x = y$. A tale scopo, notiamo che le condizioni $x\rho y$ e $y\rho x$ si traducono nell'aversi

$$U(x) \geq U(y) \quad \text{e} \quad U(y) \geq U(x),$$

da cui ovviamente segue
$$U(x) = U(y).$$

Da quest'ultima, tuttavia, non è possibile concludere che

$$x = y$$

a meno che non si assuma che la funzione $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ sia iniettiva. Nodimeno, nel caso più generale in cui la funzione d'utilità del consumatore non sia iniettiva, si può ripartire $\mathbb{R}^n_+$ nella famiglia dei suoi insiemi di livello, curve di indifferenza della funzione $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$, ed osservare che la $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ induce una relazione d'ordine proprio sui suoi insiemi di livello. Più precisamente, indicata con $\mathfrak{L}$ la famiglia degli inisemi di livello della funzione, consideriamo la relazione $\tilde{\rho}_U : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ data da

$$L \tilde{\rho}_U M \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} U(x) \geq U(y), \quad \forall L, M \in \mathfrak{L}$$

essendo $x \in L$ ed $y \in M$ arbitrariamente scelti. Tale relazione è ben definita in quanto la scelta di $x \in L$ e di $y \in M$ non condiziona i rispettivi valori $U(x)$ ed $U(y)$[2]. Inoltre si prova facilmente che $\tilde{\rho}_U : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ è riflessiva e transitiva. Per provare che $\tilde{\rho}_U : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ è anche antisimmetrica in senso lato, osserviamo che comunque considerata una coppia di insiemi di livello $L, M \in \mathfrak{L}$ per i quali si abbia sia $L \tilde{\rho}_U M$ che $M \tilde{\rho}_U L$ risulta

$$U(x) = U(y)$$

in corrispondenza agli elementi $x \in L$ ed $y \in M$ scelti per rappresentare L ed M rispettivamente. Ciò comporta allora che x ed y debbano appartenere allo stesso insieme di livello e quindi che gli insiemi di livello L ed M con intersezione non vuota coincidono, $L = M$. Resta così provato che $\tilde{\rho}_U : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ è antisimmetrica in senso lato.

1.4 Insiemi Ordinati

Sia X un insieme non vuoto e sia $\rho : X \to X$ una relazione d'ordine (in senso lato) in X. In seguito, indicheremo una tale relazione con il simbolo $\succeq$ e diremo che introduce un *ordinamento* su X. L'insieme X stesso dotato della relazione d'ordine $\succeq$ si chiamerà *insieme ordinato*.

Definizione (Maggioranti) Diciamo che un sottoinsieme non vuoto A di X è *superiormente limitato*, se esiste almeno un elemento $x \in X$ tale che

$$x \succeq a, \quad \forall a \in A.$$

Un tale elemento x è chiamato un *maggiorante* o *confine superiore* di A. Indicheremo l'insieme dei maggioranti di A con la notazione $Magg(A)$.

[2] Per definizione la funzione $U : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ assume valore costante su ciascuno dei suoi insiemi di livello

Esempio Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali dotato dell'ordinamento canonico crescente $\geq$. Considerato il sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ dato da

$$A \equiv \{a \in \mathbb{R} \mid a = \frac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Si verifica che A è superiormente limitato e che

$$Magg(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}.$$

Discussione Infatti, per ogni $x \geq 1$ si ha

$$x \geq \frac{n}{n+1},$$

in quanto si ha chiaramente

$$1 \geq \frac{n}{n+1}.$$

Esempio Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali dotato dell'ordinamento canonico crescente $\geq$. Consideriamo il sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ dato da

$$A \equiv \{a \in \mathbb{R} \mid a = \frac{n^2}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Si verifica che A non è superiormente limitato e pertanto

$$Magg(A) = \emptyset.$$

Discussione Bisogna osservare che non esiste alcun $x \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia

$$x \geq \frac{n^2}{n+1}. \tag{1.1}$$

Per rendersi conto di ciò si notiamo in primo luogo che se un tale tale x_0 esistesse, allora dovrebbe essere necessariamente positivo. D'altra parte, la disuguaglianza (1.1) verrebbe violata pur di scegliere $n_0 \geq x_0 + 1$. Infatti, con tale scelta di n_0 la (1.1) comporterebbe

$$x_0(n_0 + 1) \geq n_0^2 \geq n_0(x_0 + 1)$$

ossia

$$x_0 \geq n_0$$

ma ciò, stante proprio la scelta di n_0, è chiaramente assurdo.

Definizione (Massimo) Diciamo che un sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato A di X ammette un *massimo*, e lo denotiamo con il simbolo $\max(A)$, se esiste un maggiorante di A che appartiene ad A stesso. Ossia se esiste un elemento $\bar{a} \in A$ tale che

$$\bar{a} \succeq a, \quad \forall a \in A.$$

Proposizione (Unicità del Massimo) Se un sottoinsieme non vuoto A di X ammette un massimo, questo è unico.

Dimostrazione Supponiamo che esistano due elementi $\bar{a}_1$ e $\bar{a}_2$ che siano entrambi un massimo per A. Poichè $\bar{a}_1$ è un massimo ed $\bar{a}_2 \in A$ dovrà allora aversi

$$\bar{a}_1 \succeq \bar{a}_2.$$

D'altra parte, poichè $\bar{a}_2$ è anche esso un massimo di A ed $\bar{a}_1 \in A$ dovrà anche aversi

$$\bar{a}_2 \succeq \bar{a}_1.$$

Per la proprietà transitiva della relazione d'ordine $\succeq$ non resta che concludere

$$\bar{a}_1 = \bar{a}_2,$$

ossia l'unicità del massimo.$\Box$

Esempio Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali dotato dell'ordinamento canonico crescente $\geq$. Consideriamo il sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ dato da

$$A \equiv \{a \in \mathbb{R} \mid a = \frac{n+1}{n},\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\}.$$

Notiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha chiaramente

$$\frac{n+1}{n} \leq 2,$$

quindi $2 \in Magg(A)$. Inoltre otteniamo

$$\frac{n+1}{n} = 2$$

per la scelta di $n = 1$. Quindi $2 \in A$ ed in definitiva $2 = \max(A)$.

Definizione (Minorante) Diciamo che un sottoinsieme non vuoto A di X è *inferiormente limitato* se esiste almeno un elemento $x \in X$ tale che

$$a \succeq x, \quad \forall a \in A.$$

Un tale elemento x è chiamato un *minorante* o *confine inferiore* di A. Indicheremo l'insieme dei minoranti di A è con la notazione $Minor(A)$.

Esempio Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali dotato dell'ordinamento canonico crescente $\geq$. Considerato il sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ dato da

$$A \equiv \{a \in \mathbb{R} \mid a = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Si verifica che A è inferiormente limitato e che

$$Minor(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \geq x\}.$$

Definizione (Minimo) Diciamo che un sottoinsieme non vuoto e inferiormente limitato A di X ammette un *minimo*, e lo denotiamo con il simbolo $\min(A)$, se esiste un minorante di A che appartiene ad A stesso. Ossia se esiste un elemento $\underline{a} \in A$ tale che

$$a \succeq \underline{a}, \quad \forall a \in A.$$

Proposizione (Unicità del Minimo) Se un sottoinsieme non vuoto A di X ammette un minimo, questo è unico.

Dimostrazione Esercizio...

Esempio Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali dotato dell'ordinamento canonico crescente $\geq$. Consideriamo il sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ dato da

$$A \equiv \{a \in \mathbb{R} \mid a = \frac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Notiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha chiaramente

$$\frac{n}{n+1} \geq 0,$$

quindi $0 \in Minor(A)$. Inoltre otteniamo

$$\frac{n+1}{n} = 0$$

per la scelta di $n = 0$. Quindi $0 \in A$ ed in definitiva $0 = \min(A)$.

Definizione (Estremo Superiore) Diciamo che un sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato A di X ammette un *estremo superiore* se l'insieme $Magg(A)$ ammette un minimo. Ossia, se esiste un elemento $\underline{\alpha} \in Magg(A)$ tale che

$$\alpha \succeq \underline{\alpha}, \quad \forall \alpha \in Magg(A).$$

In tal caso, chiamiamo *estremo superiore* di A, e lo denotiamo con il simbolo $\sup(A)$, il minimo dell'insieme dei maggioranti di A. In simboli,

$$\sup(A) \equiv \min(Magg(A)).$$

Osservazione (Unicità dell'Estremo Superiore) Se un sottoinsieme non vuoto A di X ammette un estremo superiore, questo è unico.

Esempio Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali dotato dell'ordinamento canonico crescente $\geq$. Consideriamo il sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ dato da

$$A \equiv \{a \in \mathbb{R} \mid a = \frac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Notiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha chiaramente

$$1 \geq \frac{n}{n+1},$$

quindi $1 \in Magg(A)$. Inoltre l'uguaglianza

$$\frac{n}{n+1} = 1$$

non è soddisfatta per alcun $n \in \mathbb{N}$. Quindi $1 \notin A$. D'altra parte, osservando che al crescere di $n \in \mathbb{N}$ gli elementi dell'insieme A sembrano avvicinarsi arbitrariamente all'elemento 1, viene spontaneo domandarsi se 1 non sia proprio il minimo dell'insieme dei maggioranti di A, ossia l'estremo superiore di A. Per provare ciò è sufficiente mostrare che comunque fissato un numero reale strettamente minore di 1 si può individuare almeno un elemento dell'insieme A maggiore di tale numero. A tale scopo fissiamo un $\varepsilon > 0$, consideriamo il numero reale $1 - \varepsilon < 1$ e proviamo che è possibile trovare almeno un $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che la disuguaglianza

$$\frac{n_\epsilon}{n_\epsilon + 1} \geq 1 - \varepsilon$$

è soddisfatta. Infatti, è immediato rendersi conto la disuguaglianza

$$\frac{n}{n+1} \geq 1 - \varepsilon$$

è equivalente alla

$$\varepsilon n \geq 1 - \varepsilon$$

e che quest'ultima è certamente soddisfatta pur di scegliere

$$n_\varepsilon \geq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Ciò prova che gli elementi di A corrispondenti alla scelta di numeri naturali maggiori ad $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ supereranno il numero $1 - \varepsilon$ e, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, si può dedurre che ogni numero strettamente minore di 1 è possibile trovare elementi di A maggiori di esso L'elemento 1 è quindi il minimo dei maggioranti di A. Ossia, $1 = \sup(A)$.

Osservazione Se un sottoinsieme non vuoto A di X ammette un massimo, questo coincide con l'estremo superiore. In altri termini, se esiste $\max(A)$ allora

$$\max(A) = \sup(A).$$

Tuttavia è possibile che esista $\sup(A)$ senza che esista $\max(A)$.

Definizione Diciamo che un sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato A di X ammette un *estremo inferiore* se l'insieme $Minor(A)$ ammette un massimo. Ossia se esiste un elemento $\overline{\alpha} \in Minor(A)$ tale che

$$\overline{\alpha} \succeq \alpha, \quad \forall \alpha \in Minor(A).$$

In tal caso, chiamiamo *estremo inferiore* di A, e lo denotiamo con il simbolo $\inf(A)$, il massimo dell'insieme dei minoranti di A. In simboli,

$$\inf(A) \equiv \max(Minor(A)).$$

Osservazione (Unicità dell'Estremo Inferiore) Se un sottoinsieme non vuoto A di X ammette un estremo inferiore, questo è unico.

Esempio Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali dotato dell'ordinamento canonico crescente $\geq$. Consideriamo il sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ dato da

$$A \equiv \{a \in \mathbb{R} \mid a = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\}.$$

Notiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha chiaramente

$$\frac{1}{n} \geq 0,$$

quindi $0 \in Minor(A)$. Inoltre l'uguaglianza

$$\frac{1}{n} = 0$$

non è soddisfatta per alcun $n \in \mathbb{N}$. Quindi $0 \notin A$. D'altra parte, osservando che al crescere di $n \in \mathbb{N}$ gli elementi dell'insieme A sembrano avvicinarsi arbitrariamente all'elemento 0, viene spontaneo domandarsi se 0 non sia proprio il massimo dell'insieme dei minoranti di A, ossia l'estremo inferiore di A. Per provare ciò è sufficiente mostrare che comunque fissato un numero reale strettamente maggiore di 0 si può individuare almeno un elemento dell'insieme A minore di tale numero. A tale scopo fissiamo un $\varepsilon > 0$ e proviamo che è possibile trovare almeno un $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tale che la disuguaglianza

$$\varepsilon \geq \frac{1}{n_\epsilon}$$

è soddisfatta. Infatti, è immediato rendersi conto la disuguaglianza

$$\frac{1}{n} \geq \varepsilon$$

è equivalente alla

$$n \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

e che quest'ultima è certamente soddisfatta pur di scegliere

$$n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon} + 1.$$

Ciò prova che gli elementi di A corrispondenti alla scelta di numeri naturali maggiori ad $\frac{1}{\varepsilon}$ saranno minori di ε e, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, si può dedurre che comunque considerato un numero strettamente maggiore di 0 è possibile trovare elementi di A minori di esso. L'elemento 0 è quindi il massimo dei minoranti di A. Ossia, $0 = \inf(A)$.

Osservazione Se un sottoinsieme non vuoto A di X ammette un minimo, questo coincide con l'estremo inferiore. In altri termini, se esiste $\min(A)$ allora

$$\min(A) = \inf(A).$$

Tuttavia è possibile che esista $\inf(A)$ senza che esista $\min(A)$.

1.5 Insieme Ordinato dei Numeri Reali

Sia $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali dotato dell'ordinamento canonico crescente $\geq$.

Assioma (Fondamentale Proprietà di Completezza di $\mathbb{R}$) Ogni sottoinsieme non vuoto e superiormente limitato [risp. inferiormente limitato] A di $\mathbb{R}$ ammette estremo superiore [risp. estremo inferiore].

Esercizio Dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ dire se sono superiormente e/o inferiormente limitati e nei casi affermativi determinare gli eventuali massimi e minimi e/o gli estremi superiore ed inferiore.

$$A \equiv \{a \in \mathbb{R} \mid a = \frac{n^2}{n^2+1},\ n \in \mathbb{N}\};$$

$$A \equiv \{a \in \mathbb{R} \mid a = \frac{n^2+1}{n^2},\ n \in \mathbb{N} - \{0\}\};$$

$$A \equiv \{a \in \mathbb{R} \mid a = -\frac{n}{n^2+1},\ n \in \mathbb{N}\};$$

$$A \equiv \{a \in \mathbb{R} \mid a = \exp_2(n),\ n \in \mathbb{N}\};$$

$$A \equiv \{a \in \mathbb{R} \mid a = \exp_{1/2}(n),\ n \in \mathbb{N}\};$$

$$A \equiv \{a \in \mathbb{R} \mid a = \exp_2(-n),\ n \in \mathbb{N}\};$$

$$A \equiv \{a \in \mathbb{R} \mid a = \exp_{1/2}(-n),\ n \in \mathbb{N}\};$$

$$A \equiv \{a \in \mathbb{R} \mid a = \log_2(n),\ n \in \mathbb{N}\};$$

$$A \equiv \{a \in \mathbb{R} \mid a = \log_{1/2}(n),\ n \in \mathbb{N}\}.$$