# Note di Matematica Generale

Roberto Monte

October 18, 2006

**Abstract**

These notes are still a work in progress and are intended to be for internal use. Please, don't cite or quote.

# Contents

# Chapter 1

# Elementi di Teoria Elementare delle Funzioni

## 1.1 Generalità sulle Funzioni

Siano dati due insiemi non vuoti, $X$, $Y$.

**Definizione** Con il termine *funzione*, o *applicazione*, di $X$ in $Y$ intendiamo ogni regola $f$ che consente di associare ad **ogni** elemento di $X$ **uno ed un solo** elemento di $Y$ .

**Notazione** Per denotare una funzione di $X$ in $Y$ caratterizzata dalla regola $f$ adopereremo il simbolo $f : X \to Y$.

È importante notare che gli elementi costitutivi di una funzione sono sia la regola associativa $f$ che gli insiemi di riferimento $X$ ed $Y$. Pertanto modificando uno qualsiasi di tali elementi si ottiene una funzione differente. In effetti il problema prioritario da risolvere nello analisi delle funzioni è proprio la determinazione dell'insieme $X$ sul quale una data regola $f$ definisce una funzione a valori in un dato insieme $Y$.

**Definizione** Chiameremo gli insiemi $X$ ed $Y$ rispettivamente *dominio* e *codominio* della funzione. Inoltre, comunque considerato un elemento $x \in X$ chiameremo *immagine* di $x$ mediante $f$, o *valore* di $f$ in $x$, e lo denoteremo con il simbolo $f(x)$, l'unico elemento $y \in Y$ associato ad $x$ mediante la regola $f$.

**Definizione (Grafico di Funzione)** Chiamiamo grafico della funzione $f : X \to Y$, e lo denotiamo con il simbolo $\Gamma_f$, il sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times Y$ dato da

$$\Gamma_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$

**Osservazione** Un generico sottoinsieme $S$ del prodotto cartesiano $X \times Y$ si presta a rappresentare il grafico di una funzione se e solo se per ogni $x \in X$ il sottoinsieme $\{x\} \times Y$ di $X \times Y$ interseca $S$ in uno ed un solo punto.

**Definizione** Comunque dato $x_0 \in X$, il sottoinsieme $\{x_0\} \times Y$ di $X \times Y$ è noto come *retta* di $X \times Y$ di equazione $x = x_0$ ed è rappresentato graficamente come una retta parallela all'asse rappresentante l'insieme $Y$ spiccata dal punto $x_0$ sull'asse rappresentante l'insieme $X$.

**Esempio (Funzione Identica)** Sia $X$ un insieme non vuoto e sia $f$ la regola definita ponendo

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x, \quad \forall x \in X.$$

Tale regola consente di definire una funzione $f : X \to X$, la cosiddetta *funzione identità* su $X$, denotata anche con il simbolo $id_X : X \to X$.

**Esempio (Funzione Generatrice dei Numeri Pari)** Siano $X = Y = \mathbb{N}$ e sia $f$ la regola definita ponendo

$$f(n) \stackrel{\text{def}}{=} 2n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tale regola consente di definire una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la cosiddetta *funzione generatrice dei numeri pari.*

**Esempio (Funzione Generatrice dei Numeri Dispari)** Siano $X = Y = \mathbb{N}$ e sia $f$ la regola definita ponendo

$$f(n) \stackrel{\text{def}}{=} 2n + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tale regola consente di definire una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la cosiddetta *funzione generatrice dei numeri dispari.*

**Esempio** Siano $X = Y = \mathbb{N}$ e sia $f$ la regola definita ponendo

$$f(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tale regola non consente di definire una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

**Esempio** Siano $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{R}$ e sia $f$ la regola definita ponendo

$$f(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tale regola consente di definire una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

**Esempio** Siano $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ e sia $f$ la regola definita ponendo

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tale regola non consente di definire una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

**Esempio** Siano $X = \mathbb{R}_+$, $Y = \mathbb{R}$ e sia $f$ la regola definita ponendo

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Tale regola consente di definire una funzione $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

**Esempio** Dato il parametro $a \in \mathbb{R}$, siano $X = Y = \mathbb{R}$, e sia $f$ la regola definita ponendo

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} a, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tale regola consente di definire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la cosiddetta *funzione costante* di *valore* $a$.

**Esempio** Dato il parametro $a \in \mathbb{R}$, siano $X = Y = \mathbb{R}$, e sia $f$ la regola definita ponendo

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tale regola consente di definire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la cosiddetta *funzione lineare* di *rapporto incrementale* $a$.

**Esempio** Dati i parametri $a, b \in \mathbb{R}$, siano $X = Y = \mathbb{R}$ e sia $f$ la regola definita ponendo

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tale regola consente di definire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la cosiddetta *funzione affine* di *rapporto incrementale* $a$ e *quota* $b$, ovvero *polinomio di primo grado* con *coefficiente* di *grado massimo* $a$ e *termine noto* $b$.

**Esempio** Dato il parametro $a \in \mathbb{R}$, siano $X = Y = \mathbb{R}$, e sia $f$ la regola definita ponendo

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} ax^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tale regola consente di definire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la cosiddetta *funzione quadratica* di *convessità* [risp. *concavità*] $a$, se $a \in \mathbb{R}_+$ [risp. $a \in \mathbb{R}_-$].

**Esempio** Dati i parametri $a, b \in \mathbb{R}$, siano $X = Y = \mathbb{R}$, e sia $f$ la regola definita ponendo

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} ax^2 + bx, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tale regola consente di definire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la cosiddetta *funzione quadratica* di *convessità* [risp. *concavità*] $a$, se $a \in \mathbb{R}_+$ [risp. $a \in \mathbb{R}_-$] e di vertice $-b/2a$.

**Esempio** Dati i parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$, siano $X = Y = \mathbb{R}$, e sia $f$ la regola definita ponendo

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} ax^2 + bx + c, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tale regola consente di definire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la cosiddetta *funzione quadratica* di *convessità* [risp. *concavità*] $a$, se $a \in \mathbb{R}_+$ [risp. $a \in \mathbb{R}_-$], di vertice $-b/2a$ e di quota $c$.

**Esempio** Dato il parametro $a \in \mathbb{R}_-$, siano $X = Y = \mathbb{R}$ e sia $f$ la regola definita ponendo

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} a^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tale regola non consente di definire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

**Esempio** Dato il parametro $a \in \mathbb{R}_+$, siano $X = Y = \mathbb{R}$ e sia $f$ la regola definita ponendo

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} a^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tale regola consente di definire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la cosiddetta *funzione esponenziale* in *base* $a$, denotata anche con il simbolo $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

**Esempio** Dato il parametro $a \in \mathbb{R}_+$, siano $X = Y = \mathbb{R}$ e sia $f$ la regola definita ponendo

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \log_a(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tale regola non consente di definire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

**Esempio** Dato il parametro $a \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$, siano $X = \mathbb{R}_+$, $Y = \mathbb{R}$ e sia $f$ la regola definita ponendo

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \log_a(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Tale regola consente di definire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la cosiddetta *funzione logaritmo* in *base* $a$, denotata anche con il simbolo $\log_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

**Esempio** Ricordiamo che, comunque considerati $m$, $n \in \mathbb{N}$, diciamo che $m$ è un *divisore* di $n$ se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$n = k \cdot m.$$

Ogni $n \in \mathbb{N}$ possiede almeno due divisori, cosiddetti *banali*, il numero $n$ stesso ed 1. Diciamo che $m$ è un *divisore non banale* di $n$ se $m$ è un *divisore* di $n$ ed $m \notin \{1, n\}$. Consideriamo adesso la regola $f$ che associa ad ogni $n \in \mathbb{N}$ i suoi divisori non banali. Secondo tale regola i numeri $1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...$ non hanno nessun corrispondente. Sono infatti i cosiddetti numeri *primi*, caratterizzati proprio dal non avere divisori non banali. Tale regola non si presta pertanto a definire una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Consideriamo allora la stessa regola che associa ad ogni $n \in \mathbb{N} - \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$ i suoi divisori non banali. In questo caso ogni elemento di $\mathbb{N} - \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$ viene associato ad almeno un elemento di $\mathbb{N}$. Tuttavia ci sono elementi di $\mathbb{N} - \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$ che vengono associati a più di un elemento. Ad esempio il numero 0 viene associato ad ogni altro numero naturale, in quanto ogni numero naturale è un divisore di 0, il numero 6 viene associato a 2 e 3, e così via. In altri termini, la regola considerata non si presta neanche a definire una funzione $f : \mathbb{N} - \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\} \to \mathbb{N}$.

## 1.2 Insieme Immagine e Controimmagine di una Funzione

Sia $f : X \to Y$ una funzione di $X$ in $Y$.

**Definizione (Insieme Immagine)** Considerato un sottoinsieme $A$ di $X$ chiamiamo *immagine* di $A$ mediante $f$, e lo denotiamo con il simbolo $f(A)$, l'insieme

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid y = f(x),\ x \in A\}.$$

In particolare, quando $A = X$, l'insieme $f(X)$ è chiamato *insieme dei valori* di $f$.

**Osservazione** Comunque considerati $A_1, A_2 \subseteq X$ risulta:

**1.** $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;

**2.** $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$;

**Esercizio** Mostrare che **non è in generale vero** che comunque considerati $A_1, A_2 \subseteq X$ risulta $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

**Esercizio** Esiste una qualche relazione tra $f(A_X^c)$ ed $f(A)_Y^c$ ?

**Definizione (Insieme Controimmagine)** Considerato un sottoinsieme $B$ di $Y$ chiamiamo *controimmagine*, o *immagine inversa*, di $B$ mediante $f$, e lo denotiamo con il simbolo $f^{-1}(B)$, l'insieme

$$f^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

**Osservazione** Comunque considerati $B_1, B_2 \subseteq Y$ risulta:

**1.** $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

**2.** $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subseteq f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;

**3.** $f^{-1}(B_Y^c) = f^{-1}(B)_X^c$.

## 1.3 Funzioni Iniettive, Suriettive, Biiettive

Sia $f : X \to Y$ una funzione di $X$ in $Y$.

**Definizione (Funzione Iniettiva)** Diciamo che $f : X \to Y$ è iniettiva se comunque considerati $x_1, x_2 \in X$ tali che $x_1 \neq x_2$, si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$. In altri temini, se ad elementi distinti del dominio $X$ vengono associate immagini distinte del codominio $Y$.

**Osservazione (Funzione Iniettiva)** La funzione $f : X \to Y$ è *iniettiva* se e solo se considerati $x_1, x_2 \in X$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$ si ottiene necessariamente che $x_1 = x_2$. Ossia, se due elementi del dominio hanno uguali immagini allora essi stessi sono necessariamente uguali.

**Osservazione (Funzione Iniettiva)** La funzione $f : X \to Y$ è iniettiva se e solo se per ogni $y \in Y$ l'equazione

$$f(x) = y$$

ha **al più** una soluzione.

**Osservazione (Funzione Iniettiva)** La funzione $f : X \to Y$ è iniettiva se e solo se comunque considerato $y_0 \in Y$.il sottoinsieme $X \times \{y_0\}$ del prodotto cartesiano $X \times Y$ interseca il grafico $\Gamma_f$ della funzione in **al più** un punto.

**Definizione** Comunque dato $y_0 \in X$, il sottoinsieme $X \times \{y_0\}$ di $X \times Y$ è noto come *retta* di $X \times Y$ di equazione $y = y_0$ ed è rappresentato graficamente come una retta parallela all'asse rappresentante l'insieme $X$ spiccata dal punto $y_0$ sull'asse rappresentante l'insieme $X$.

**Definizione (Funzioni Suriettive)** Diciamo che $f : X \to Y$ è *suriettiva* se comunque considerato $y \in Y$ esiste almeno un $x \in X$ tale che $f(x) = y$. In altri temini, se ogni elemento del codominio $Y$ è immagine di almeno un elemento del dominio $X$.

**Osservazione (Funzione Suriettiva)** La funzione $f : X \to Y$ è suriettiva se e solo se per ogni $y \in Y$ l'equazione

$$f(x) = y$$

ha **almeno** una soluzione.

**Osservazione (Funzione Suriettiva)** La funzione $f : X \to Y$ è suriettiva se e solo se comunque considerato $y_0 \in Y$ la retta di $X \times Y$ di equazione $y = y_0$ interseca il grafico $\Gamma_f$ della funzione in **almeno** un punto.

**Definizione (Funzione Invertibile)** Diciamo che $f : X \to Y$ è *biiettiva* se è sia iniettiva che suriettiva.

**Osservazione (Funzione Invertibile)** La funzione $f : X \to Y$ è biiettiva se e solo se per ogni $y \in Y$ l'equazione

$$f(x) = y$$

ha **una ed una sola** una soluzione.

**Osservazione (Funzione Invertibile)** La funzione $f : X \to Y$ è invertibile se e solo se comunque considerato $y \in Y$ la retta di $X \times Y$ di equazione $y = y_0$ interseca il grafico $\Gamma_f$ della funzione in **uno ed un solo** un punto.

## 1.4 Funzioni Composte, Funzioni Invertibili, Funzioni Inverse

Siano $X$, $Y$, $Z$ insiemi non vuoti e siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni.

**Definizione (Composizione di Funzioni)** Chiamiano *funzione composta* di $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, e la denotiamo con il simbolo $g \circ f : X \to Z$, la funzione di dominio $X$ e codominio$Y$ data da

$$(g \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(x)) \quad \forall x \in X.$$

**Osservazione (Composizione di Funzioni)** In generale date le funzioni $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ non ha senso considerare la funzione composta associata alla regola $f \circ g$. Ciò perchè il codominio $Z$ di $g$ potrebbe non avere nulla a che fare con il dominio $X$ di $f$. Inoltre, anche quando fosse possibile considerare la funzione composta associata alla regola $f \circ g$, ad esempio qualora $Z \subseteq X$, in generale la funzione composta $f \circ g : Y \to Y$ è diversa da $g \circ f : X \to Z$, e ciò anche quando $X = Y = Z$.

**Esempio** Siano $X = Y = \mathbb{R}$, sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$g(y) \stackrel{\text{def}}{=} y^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

La funzione composta $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è allora definita da

$$(g \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x + 1)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Da notare che in questo caso resta anche definita la funzione composta $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e si ha

$$(f \circ g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^2 + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Siano $X$, $Y$ insiemi non vuoti, sia $f : X \to Y$ una funzione di $X$ in $Y$ e siano $id_X : X \to X$ ed $id_Y : Y \to Y$ le funzioni identiche su $X$ ed $Y$ rispettivamente.

**Definizione (Funzioni Invertibili)** Diciamo che $f : X \to Y$ è *invertibile* se esiste una funzione $g : Y \to X$, tale che per le funzioni composte $g \circ f : X \to X$ e $f \circ g : Y \to Y$ si abbia

$$g \circ f = id_X, \qquad \text{e} \qquad f \circ g = id_Y.$$

Una tale funzione $g : Y \to X$, se esiste, è chiamata *funzione inversa* di $f$ ed è solitamente indicata con il simbolo $f^{-1} : Y \to X$.

**Osservazione** La funzione $f : X \to Y$ è invertibile se e solo è biiettiva.

Siano $X$, $Y$ insiemi non vuoti, sia $f : X \to Y$ una funzione invertibile di $X$ in $Y$ e sia $f^{-1} : Y \to X$ l'inversa di $f : X \to Y$.

**Osservazione** Per ogni sottoinsieme $B$ di $Y$ la controimmagine di $B$ mediante $f : X \to Y$ coincide con l'immagine di $B$ mediante $f^{-1} : Y \to X$. In simboli, pur essendo la controimmagine di $B$ mediante $f : X \to Y$ e l'immagine di $B$ mediante $f^{-1} : Y \to X$ due concetti differenti, le notazioni adottate conducono all'apparente tautologia

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(B).$$

Si noti altresì che nel momento in cui il sottoinsieme $B$ di $Y$ si riduce al singleton $\{y\}$, per un certo $y \in Y$, possiamo scrivere

$$f^{-1}(\{y\}) = \left\{f^{-1}(y)\right\},$$

dove il secondo membro è definito in virtù della supposta invertibilità di $f : X \to Y$. Si noti infine che, per un più generale sottoinsieme $B$ di $Y$, in virtù dell'uguaglianza $B = \bigcup_{y \in B} \{y\}$ e della Proprietà 1.2.1, risulta ancora

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\bigcup_{y\in B} \{y\}) = \bigcup_{y\in B} f^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{y\in B} \left\{f^{-1}(y)\right\} = f^{-1}(B),$$

dove si vede un pò più chiaramentre che il primo e l'ultimo membro della catena d'uguaglianze sono rispettivamente la controimmagine di $B$ mediante $f : X \to Y$ e l'immagine di $B$ mediante $f^{-1} : Y \to X$.