Note di Matematica Generale
Elementi di Teoria degli Spazi Vettoriali

Roberto Monte

December 15, 2003

Abstract

These notes are still a work in progress and are intended to be for internal use. Please, don't cite or quote.

Contents

Chapter 1

Elementi di Teoria degli Spazi Vettoriali

1.1 Spazi Vettoriali

Consideriamo il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^n$ di n-copie dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Ricordiamo che gli elementi $A \in \mathbb{R}^n$ sono n-ple ordinate di numeri reali che rappresenteremo indifferentemente in forma di riga o di colonna, ossia come

$$A \equiv (a_1, \dots, a_n) \qquad \text{o} \qquad A \equiv \left(\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array} \right),$$

secondo convenienza.

Definition 1 *Comunque dati due elementi $A \equiv (a_1, \dots, a_n), B \equiv (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ chiamiamo* somma *di A ed B, e lo denotiamo con il simbolo A+B, l'elemento di $\mathbb{R}^n$ dato da*

$$A + B \stackrel{def}{=} (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n).$$

Remark 2 (Proprietà Associativa) *Comunque considerati gli elementi $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ si ha*

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Possiamo pertanto scrivere senza ambiguità

$$A + B + C$$

per la somma dei tre elementi A, B, C.

Remark 3 (Esistenza dell'Elemento Neutro) *Fissato l'elemento $O \equiv (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$,* elemento neutro *per l'operazione di somma, e comunque considerato l'elemento $A \equiv (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha*

$$A + O = A.$$

Remark 4 (Esistenza dell'Elemento Opposto) *Comunque considerato l'elemento* $A \equiv (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$*, ed introdotto l'elemento* $-A \equiv (-a_1, \ldots, -a_n)$*,* elemento opposto *di* A *per l'operazione di somma si ha*

$$A + (-A) = O.$$

Remark 5 (Proprietà Commutativa) *Comunque considerati gli elementi* $A, B \in \mathbb{R}^n$ *si ha*

$$A + B = B + A.$$

Definition 6 *Comunque dati un elemento* $x \in \mathbb{R}$ *ed un elemento* $A \equiv (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *chiamiamo* prodotto esterno *di* x *per* A*, e lo denotiamo con il simbolo* xA*, l'elemento di* $\mathbb{R}^n$ *dato da*

$$xA \stackrel{def}{=} (xa_1, \ldots, xa_n).$$

Remark 7 (Proprietà Associativa) *Comunque considerati gli elementi* $x, y \in \mathbb{R}$ *e l'elemento* $A \in \mathbb{R}^n$ *si ha*

$$x(yA) = xyA.$$

Remark 8 (Esistenza dell'Elemento Neutro) *Fissato l'elemento* $1 \in \mathbb{R}$*,* elemento neutro *per l'operazione di prodotto, e comunque considerato l'elemento* $A \equiv (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *si ha*

$$1A = A.$$

Remark 9 (Esistenza dell'Elemento Annullatore) *Fissato l'elemento* $0 \in \mathbb{R}^n$*,* elemento annullatore *per l'operazione di prodotto, e comunque considerato l'elemento* $A \equiv (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *si ha*

$$0A = O.$$

Remark 10 (I Proprietà Distributiva) *Comunque considerati gli elementi* $x, y \in \mathbb{R}$ *e l'elemento* $A \in \mathbb{R}^n$ *si ha*

$$(x + y)A = (x + y)A.$$

Remark 11 (II Proprietà Distributiva) *Comunque considerato l'elemento* $x \in \mathbb{R}$ *e gli elementi* $A, B \in \mathbb{R}^n$ *si ha*

$$x(A + B) = xA + xB.$$

Remark 12 *Fissato l'elemento* $-1 \in \mathbb{R}$ *e comunque considerato l'elemento* $A \in \mathbb{R}^n$ *si ha*

$$(-1)A = -A.$$

Remark 13 *Comunque considerato l'elemento* $x \in \mathbb{R}$ *e fissato l'elemento* $O \in \mathbb{R}^n$ *si ha*

$$xO = O.$$

Definition 14 *Il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^n$ dotato dell'operazione di somma e di prodotto esterno è chiamato* spazio vettoriale *ed i suoi elementi prendono il nome di vettori. In questo contesto un generico elemento $x \in \mathbb{R}$ è chiamato* scalare*.*

Definition 15 *Comunque dati m vettori $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^n$ ed m scalari $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ chiamiamo* combinazione lineare *di $A_1, \dots, A_m$ a coefficienti $x_1, \dots, x_m$, e la denotiamo con il simbolo $\sum_{k=1}^m x_k A_k$, il vettore di $\mathbb{R}^n$ dato da*

$$\sum_{k=1}^{m} x_k A_k \stackrel{def}{=} x_1 A_1 + \cdots x_m A_m.$$

Remark 16 *Siano $A_1 \equiv (a_1^1, \dots, a_n^1), \dots, A_m \equiv (a_1^m, \dots, a_n^m)$. Denotata sinteticamente con $B \equiv (b_1, \dots, b_n)$ la combinazione lineare $\sum_{k=1}^m x_k A_k$, in termini di componenti risulta*

$$\begin{aligned} a_1^1 x_1 + \cdots + a_1^m x_m &= b_1, \\ \vdots &= \vdots \\ a_n^1 x_1 + \cdots + a_n^m x_m &= b_n \end{aligned}$$

Definition 17 *Dati m vettori $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^n$ diciamo che essi sono* linearmente indipendenti *se per realizzare la combinazione lineare*

$$\sum_{k=1}^{m} x_k A_k = O$$

è necessario scegliere gli scalari $x_1, \dots, x_m$ tutti nulli. Diciamo altresì che $A_1, \dots, A_m$ sono linearmente dipendenti *se non sono linearmente indipendenti. Ossia se è possibile determinare m scalari $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che si abbia*

$$\sum_{k=1}^{m} x_k A_k = O.$$

Proposition 18 *I vettori $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di essi è combinazione lineare dei rimanenti.*

Remark 19 *Siano $A_1 \equiv (a_1^1, \dots, a_n^1), \dots, A_m \equiv (a_1^m, \dots, a_n^m)$. Alla luce dell'Osservazione 16 possiamo allora affermare che tali vettori sono linearmente indipendenti se il sistema lineare omogeneo*

$$\begin{aligned} a_1^1 x_1 + \cdots + a_1^m x_m &= 0, \\ \vdots &= \vdots \\ a_n^1 x_1 + \cdots + a_n^m x_m &= 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

ammette la sola soluzione $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$, soluzione banale*. Gli stessi vettori sono linearmente dipendenti se il sistema lineare omogeneo (1.1) ammette almeno una soluzione $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$,* soluzione non banale*.*

Example 20 *Dato lo spazio vettoriale* $\mathbb{R}^3$*, i vettori*

$$A_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

sono linearmente indipendenti.

Discussione. Appare chiaro che la combinazione lineare

$$\sum_{k=1}^{5} x_k A_k = O$$

si traduce nel sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

che ammette la sola soluzione banale $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$.$\square$

Example 21 *Dato lo spazio vettoriale* $\mathbb{R}^3$*, i vettori*

$$A_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A_4 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A_5 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

sono linearmente dipendenti

Discussione. Infatti, appare chiaro che la combinazione lineare

$$\sum_{k=1}^{5} x_k A_k = O$$

può essere realizzata mediante gli scalari

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 1, \qquad x_4 = -1, \qquad x_5 = 0,$$

che quindi possono essere scelti non tuttti nulli.$\square$

Example 22 *Dato lo spazio vettoriale* $\mathbb{R}^3$ *ed un parametro* $\alpha \in \mathbb{R}$ *si considerino i vettori*

$$A_1 \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Si desidera stabilire per quali valori di tale parametro α *i suddetti vettori sono linearmente indipendenti o dipendenti.*

Discussione. Esprimendo la combinazione lineare

$$\sum_{k=1}^{3} x_k A_k = O,$$

in termini di componenti, questa si traduce nel sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \alpha x_2 = 0, \\ x_2 = 0, \\ \alpha x_3 = 0, \end{cases} .$$

Sostituendo il valore di x_2 ricavato dalla seconda equazione nella prima, il sistema assume la forma

$$\begin{cases} \alpha x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ \alpha x_3 = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

e si presentano due possibilità. Se è $\alpha \neq 0$, allora l'unica soluzione del sistema lineare (1.2) è chiaramente la souzione banale $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. Se altresì è $\alpha = 0$, allora si ottiene una soluzione del sistema nella forma $(x_1, 0, x_3)$ con x_1 ed x_3 numeri reali arbitrari. In altri termini, il sistema lineare (1.2) ammette ∞^2 soluzioni e quindi esiste certamente almeno una soluzione non banale. Pertanto i vettori A_1, A_2, A_3 sono linearmente indipendenti per un qualsiasi valore del parametro $\alpha \neq 0$ e sono linearmente dipendenti per $\alpha = 0$.

Definition 23 *Dato un sottoinsieme $\mathbb{S}$ di $\mathbb{R}^n$ diciamo che $\mathbb{S}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ se il vettore nullo O appartiene ad $\mathbb{S}$ e se per ogni scelta dei vettori $A_1 \equiv (a_1^1, \dots, a_n^1), \dots, A_m \equiv (a_1^m, \dots, a_n^m) \in \mathbb{S}$ e degli scalari $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ la combinazione lineare $\sum_{k=1}^{m} x_k A_k$ appartiene ancora ad $\mathbb{S}$.*

Example 24 *Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri il sottoinsieme*

$$\mathbb{S} \equiv \{A \equiv (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_3 = 0\}.$$

$\mathbb{S}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$

Discussione. È sufficiente osservare che il vettore O appartiene ad $\mathbb{S}$, in quanto soddisfa chiaramente la condizione $a_3 = 0$ caratterizzante i vettori di $\mathbb{S}$. Inoltre è semplice rendersi conto che ogni combinazione lineare di vettori di $\mathbb{S}$ la cui terza componente è nulla, produce ancora un vettore la cui terza componente è nulla e pertanto appartenente ancora ad $\mathbb{S}$.$\square$

Example 25 *Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri il sottoinsieme*

$$\mathbb{S} \equiv \{A \equiv (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_3 = 1\}.$$

$\mathbb{S}$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$

Discussione. E' sufficiente osservare che il vettore O non appartiene ad $\mathbb{S}$ in quanto evidentemente non soddisfa la condizione $a_3 = 1$ caratterizzante i vettori di $\mathbb{S}$.$\square$

Example 26 *Dato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si consideri il sottoinsieme*

$$\mathbb{S} \equiv \{A \equiv (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_3 = a_2^2\}.$$

L'insieme considerato non è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

Discussione. Nonostante il vettore nullo O appartenga ad $\mathbb{S}$, in quanto soddisfa la condizione caratterizzante $a_3 = a_2^2$, non è difficile rendersi conto che la somma dei due vettori

$$A_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ed} \qquad A_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

entrambi appartenenti ad $\mathbb{S}$, in quanto entrambi chiaramente soddisfacenti la condizione $a_3 = a_2^2$, non è un elemento di $\mathbb{S}$. Infatti si ha

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

e la condizione caratterizzante i vettori di $\mathbb{S}$ non è chiaramente soddisfatta. Ciò è sufficiente per concludere che $\mathbb{S}$ non è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.$\square$

Definition 27 *Dati m vettori $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^n$ diciamo che $A_1, \ldots, A_m$* generano *il vettore $B \in \mathbb{R}^n$ se B è esprimibile come combinazione lineare di $A_1, \ldots, A_m$, ossia se è possibile determinare m scalari $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ tali che si abbia*

$$\sum_{k=1}^{m} x_k A_k = B.$$

Remark 28 *Siano $A_1 \equiv (a_1^1, \ldots, a_n^1), \ldots, A_m \equiv (a_1^m, \ldots, a_n^m)$. Alla luce dell'Osservazione 16 possiamo allora affermare che tali vettori generano $B \equiv (b_1, \ldots, b_n)$ se il sistema lineare non omogeneo*

$$\begin{aligned} a_1^1 x_1 + \cdots + a_1^m x_m &= b_1, \\ \vdots &= \vdots \\ a_n^1 x_1 + \cdots + a_n^m x_m &= b_n, \end{aligned} \tag{1.3}$$

ammette almeno una sola soluzione $(x_1, \ldots, x_n)$. Gli stessi vettori sono linearmente dipendenti se il sistema lineare omogeneo (1.1) ammette almeno una soluzione $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$, soluzione non banale.

Example 29 *Dato lo spazio vettoriale* $\mathbb{R}^3$ *si considerino i vettori*

$$A_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A_4 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tali vettori generano il vettore

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Discussione. Infatti, è immediato verificare che risulta

$$A = 0A_1 + A_2 + 2A_3 + A_4.$$

$\square$

Definition 30 *Dato un sottospazio* $\mathbb{S}$ *di* $\mathbb{R}^n$ *ed* m *vettori* $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^n$, *diciamo che* $A_1, \ldots, A_m$ generano *il sottospazio* $\mathbb{S}$ *se generano ogni vettore* $B \in \mathbb{S}$. *Ossia se ogni* $B \in \mathbb{S}$ *è è esprimibile come combinazione lineare di* $A_1, \ldots, A_m$.

Example 31 *Dato il sottospazio*

$$\mathbb{S} \equiv \{B \equiv (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \mid b_3 = 0\},$$

esso è generato dai vettori

$$A_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Discussione. Considerato un vettore A di $\mathbb{S}$ questo si presenta nella forma

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per opportuni $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. E' allora immediato verificare che possiamo scrivere

$$A = a_1 A_1 + a_2 A_2 + 0A_3$$

il che prova che A è esprimibile come combinazione lineare dei vettori A_1, A_2, A_3. L'arbitrarietà di A comporta allora che A_1, A_2, A_3 generano $\mathbb{S}$.$\square$

Definition 32 *Dato un sottospazio* $\mathbb{S}$ *di* $\mathbb{R}^n$ *ed* m *vettori* $A_1, \ldots, A_m \in \mathbb{R}^n$, *diciamo che* $A_1, \ldots, A_m$ *costituiscono una* base *di* $\mathbb{S}$ *se generano* $\mathbb{S}$ *e se sono linearmente indipendenti.*

Example 33 *Dato il sottospazio*

$$\mathbb{S} \equiv \{A \equiv (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_3 = 0\},$$

una sua base è costituita dai vettori

$$A_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad ed \qquad A_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Invece i vettori

$$A_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pur generando $\mathbb{S}$ *non costituiscono una sua base.*

Proposition 34 *Se una base per un sottospazio* $\mathbb{S}$ *di* $\mathbb{R}^n$ *è costituita da* m *vettori, allora ogni altra sua base è costituita anche essa da* m *vettori.*

Definition 35 *Chiamiamo dimensione di* $\mathbb{S}$ *il numero degli elementi di una qualsiasi base di* $\mathbb{S}$*.*

Remark 36 *La dimensione di* $\mathbb{R}^n$ *è* n *ed i vettori*

$$E_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ldots, \qquad E_{n-1} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_n \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

costituiscono una sua base.

Definition 37 *La base di* $\mathbb{R}^n$ *costituita dagli* n *vettori* $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}, E_n$ *è chiamata* base canonica.\

Sia $\mathbb{S}$ un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione m.

Remark 38 *Ogni sottoinsieme di* $\mathbb{S}$ *contenente più di* m *vettori non può essere un sottoinsieme di vettori linearmente indipendenti. Ogni sottoinsieme di* $\mathbb{S}$ *contenente meno di* m *vettori non può essere un sottoinsieme di generatori.*

Exercise 39 *Considerato il sottoinsieme di* $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{S} \equiv \{A \equiv (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0\},$$

Provare che si tratta di un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ *e determinarne una base.*

Svolgimento. Per provare che $\mathbb{S}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ bisogna verificare che il vettore nullo $O \equiv (0,0,0)$ appartiene ad $\mathbb{S}$ e che comunque scelti due vettori $A \equiv (a_1, a_2, a_3), B \equiv (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{S}$ e due scalari $x, y \in \mathbb{R}$ la combinazione lineare $xA + yB$ appartiene ancora ad $\mathbb{S}$. Per quanto riguarda il primo punto le componenti del vettore nullo O soddisfano banalmente la condizione $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ caratterizzante gli elementi di $\mathbb{S}$. Considerato il secondo punto, osserviamo che posto $xA + yB \equiv C \equiv (c_1, c_2, c_3)$ deve aversi $c_k = xa_k + yb_k$ per ogni $k = 1, 2, 3$. Di conseguenza possiamo scrivere

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= xa_1 + yb_1 + xa_2 + yb_2 + xa_3 + yb_3 \\ &= x(a_1 + a_2 + a_3) + y(b_1 + b_2 + b_3). \end{aligned}$$

D'altra parte la condizione $A \equiv (a_1, a_2, a_3), B \equiv (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{S}$ comporta che

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0 \qquad \text{e} \qquad b_1 + b_2 + b_3 = 0.$$

Pertanto risulta anche

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

e ciò prova che $xA + yB$ è anch'esso un elemento di $\mathbb{S}$. Per determinare una base di $\mathbb{S}$ occorre scegliere alcuni vettori di $\mathbb{S}$ che siano linearmente indipendenti e che generino $\mathbb{S}$. Procedendo sistematicamente, cominciamo con lo scegliere un primo vettore non nullo di $\mathbb{S}$, ad esempio il vettore $A_1 \equiv (1, -1, 0)$, e chiediamoci se da solo è in grado di generare $\mathbb{S}$. Se ciò fosse possibile, dovremmo essere in grado di scrivere ogni vettore di $\mathbb{S}$ nella forma xA_1 per un opportuno $x \in \mathbb{R}$. D'altra parte non è difficile rendersi conto che il vettore $A_2 \equiv (0, -1, 1)$ non può essere scritto in tale forma. Ossia non può mai aversi

$$A_2 = x_1 A_1$$

qualunque sia la scelta dello scalare $x_1 \in \mathbb{R}$. Scegliamo allora un altro vettore di $\mathbb{S}$ che sia linearmente indipendente da A_1 e cerchiamo di costituire con quest'ultimo ed A_1 un sistema di generatori $\mathbb{S}$. La Proposizione (18) suggerisce di scegliere come candidato proprio il vettore A_2 che, non essendo generato da A_1, costituisce unitamente ad A_1 un insieme di vettori linearmente indipendenti. Consideriamo quindi la possibilità di generare un generico vettore $A \in \mathbb{S}$ mediante la combinazione lineare $x_1 A_1 + x_2 A_2$. Dall'uguaglianza

$$A = x_1 A_1 + x_2 A_2,$$

che chiaramente si traduce nel sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 = a_1, \\ -x_1 - x_2 = a_2, \\ x_2 = a_3, \end{cases}$$

si vede che dobbiamo scegliere necessariamente

$$x_1 = a_1 \qquad \text{e} \qquad x_2 = a_3.$$

D'altra parte la condizione $A \in \mathbb{S}$ per la quale si ha

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

comporta che si abbia

$$a_2 = -(a_1 + a_3)$$

ed è quindi compatibile con l'ulteriore condizione

$$-x_1 - x_2 = a_2$$

che si ha su x_1 ed x_2. In definitiva, scegliendo $x_1 = a_1$ ed $x_2 = a_3$ si riesce a scrivere la combinazione lineare $A = x_1 A_1 + x_2 A_2$ per un generico vettore $A \in \mathbb{S}$. Possiamo pertanto concludere che l'insieme costituito dai vettori A_1 ed A_2 è una base di $\mathbb{S}$.