

Note di Matematica Generale

Roberto Monte

November 3, 2005

ABSTRACT These notes are still a work in progress and are intended to be for internal use. Please, don't cite or quote.

Contents

1	Applicazioni Economiche Elementari
----------	---

1

Applicazioni Economiche Elementari

Esempio (Funzione di Domanda Aggregata di Engels) La legge che governa la domanda di consumo aggregata di un agente economico può essere espressa in prima approssimazione dalla funzione lineare

$$C = c_0 + mR,$$

essendo C la *domanda di consumo* dell'agente, c_0 la *spesa di consumo autonoma*, ossia la domanda di consumo imprescindibile per le necessità vitali dell'agente, R il *reddito* dell'agente ed m la sua *propensione marginale al consumo*, ossia la frazione del reddito che l'agente è intenzionato a destinare al suo consumo.

Esempio (Funzione di Produzione Lineare) La legge che governa la produzione di una compagnia può essere espressa in prima approssimazione dalla funzione lineare

$$P = p_0 + mK,$$

essendo P la *produzione* della compagnia, p_0 la spesa di produzione autonoma, ossia le spese imprescindibili per l'avvio della produzione, K il *capitale investito nel processo produttivo* ed m la *redditività marginale del capitale investito*, ossia l'efficienza con cui il capitale investito contribuisce al processo produttivo.

Esercizio (Funzione di Produzione di Cobb-Douglas) Sia \mathbb{R}_+^2 il prodotto cartesiano dell'insieme dei numeri reali non negativi \mathbb{R}_+ per sè stesso.

Si assuma che una coppia $(K, L) \in \mathbb{R}_+^2$ rappresenti il numero di ore lavoro e di unità di capitale necessarie alla produzione di Q unità di un dato bene. La legge di Cobb-Douglas afferma che in prima approssimazione la quantità Q dipende dal capitale K e dalla forza lavoro L impiegati secondo la funzione

$$Q = cK^\alpha L^\beta$$

dove $c > 0$ è una costante che riassume altre possibili influenze sulla produzione (ad es. la tecnologia che interviene nel processo produttivo) ed α e β sono esponenti costanti. Descrivere le curve di indifferenza distinguendo i tre casi $\alpha + \beta = 1$, *rendimenti di scala costanti*, $\alpha + \beta > 1$, *rendimenti di scala crescenti*, $\alpha + \beta < 1$, *rendimenti di scala decrescenti*.

Esercizio Sia \mathbb{R}_+^2 il prodotto cartesiano dell'insieme dei numeri reali non negativi \mathbb{R}_+ per sè stesso. Un elemento $x \in \mathbb{R}_+^2$ è allora una coppia di numeri reali non negativi $x \equiv (x_1, x_2)$ e si presta a rappresentare un possibile paniere di 2 beni di consumo. Si supponga che la funzione di utilità di un consumatore rispetto all'acquisizione di un paniere di beni di consumo così costituito, $U : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, sia data da

$$U(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x_1 x_2}.$$

Descrivere le curve di indifferenza. Si supponga inoltre che i due beni abbiano rispettivamente prezzi $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{++}$ e che il consumatore possa investire solo una quota fissa r_0 del suo reddito R nell'acquisto di un tale paniere di beni. Individuare la scelta ottima del consumatore.

Esercizio Con riferimento all'esercizio precedente, si supponga stavolta che la funzione di utilità di un consumatore rispetto all'acquisizione di un paniere $x \equiv (x_1, x_2)$ di beni di consumo, $U : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, sia data da

$$U(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} x_1 + x_1 x_2.$$

Descrivere le curve di indifferenza. Si supponga inoltre che i due beni abbiano rispettivamente prezzi $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{++}$ e che il consumatore possa investire solo una quota fissa r_0 del suo reddito R nell'acquisto di un tale paniere di beni. Individuare la scelta ottima del consumatore.

Esercizio Semore con riferimento ai precedenti esercizi, si supponga che la funzione di utilità di un consumatore rispetto all'acquisizione di un paniere $x \equiv (x_1, x_2)$ di beni di consumo, $U : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, sia data da

$$U(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x_1 + x_2^2}.$$

Descrivere le curve di indifferenza. Si supponga inoltre che i due beni abbiano rispettivamente prezzi $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_{++}$ e che il consumatore possa investire solo una quota fissa r_0 del suo reddito R nell'acquisto di un tale paniere di beni. Individuare la scelta ottima del consumatore.

Comunque fissato $u_0 \in \mathbb{R}_+$, le curve d'indifferenza sono caratterizzate dall'equazione

$$U(x_1, x_2) = u_0.$$

Nel caso considerato si tratta allora dei sottoinsiemi di punti $x \equiv (x_1, x_2)$ di \mathbb{R}_+^2 tali che

$$\sqrt{x_1 + x_2^2} = u_0,$$

o, equivalentemente, tali che

$$x_1 + x_2^2 = u_0^2.$$

Al variare di $u_0 \in \mathbb{R}_+$, tali sottoinsiemi risultano allora essere archi di parabola in \mathbb{R}_+^2 , con asse coincidente con l'asse delle ascisse, vertice $V \equiv (u_0^2, 0)$ ed intersecanti l'asse delle ordinate nel punto $P \equiv (0, u_0)$. Il vincolo di bilancio è altresì l'insieme dei punti di punti $x \equiv (x_1, x_2)$ di \mathbb{R}_+^2 tali che

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = r_0$$

e questo è un segmento di \mathbb{R}_+^2 che interseca l'asse delle ascisse e l'asse delle ordinate nei punti $Q_1 \equiv (r_0/p_1, 0)$ e $Q_2 \equiv (0, r_0/p_2)$. La scelta ottima del consumatore si ottiene scegliendo un paniere di beni $x \equiv (x_1, x_2)$ che soddisfa il vincolo di bilancio e che massimizza l'utilità del consumatore stesso. Tecnicamente si tratta di determinare il

$$\underset{p_1 x_1 + p_2 x_2 = r_0}{Max} U(x_1, x_2).$$

Nel caso considerato tale problema può essere risolto in modo elementare osservando che dato il vincolo di bilancio, risulta

$$x_1 = \frac{r_0 - p_2 x_2}{p_1}, \quad 0 \leq x_2 \leq r_0/p_2.$$

Inoltre, è facile rendersi conto che essendo la funzione \sqrt{x} monotona crescente, avremo

$$\underset{p_1 x_1 + p_2 x_2 = r_0}{Max} U(x_1, x_2) = \underset{p_1 x_1 + p_2 x_2 = r_0}{Max} x_1 + x_2^2.$$

In definitiva non ci resta che determinare

$$\underset{0 \leq x_2 \leq r_0/p_2}{Max} \frac{r_0 - p_2 x_2}{p_1} + x_2^2.$$

A tale scopo, osserviamo che la funzione

$$\frac{r_0}{p_1} - \frac{p_2}{p_1}x_2 + x_2^2$$

è un trinomio di secondo grado, il cui grafico è una parabola che rivolge la concavità verso l'alto. Pertanto tale funzione ammetterà massimo nell'intervallo chiuso e limitato $[0, r_0/p_2]$ in uno degli estremi. Precisamente, avendosi

$$\left. \frac{r_0}{p_1} - \frac{p_2}{p_1}x_2 + x_2^2 \right|_{x_2=0} = \frac{r_0}{p_1}$$

e

$$\left. \frac{r_0}{p_1} - \frac{p_2}{p_1}x_2 + x_2^2 \right|_{x_2=r_0/p_2} = \frac{r_0^2}{p_2^2}$$

il massimo verrà assunto in $x_2 = 0$ o in $x_2 = r_0/p_2$ secondo che sia $p_2^2/p_1 \leq r_0$ o $p_2^2/p_1 \geq r_0$. Secondo che si presenti la prima o la seconda delle due eventualità indicate, il consumatore sceglierà il paniere di beni $(r_0/p, 0)$ o $(0, r_0/p_2)$ ricavandone l'utilità massima possibile $U(r_0/p, 0) = \sqrt{r_0/p}$ o $U(0, r_0/p_2) = r_0/p_2$.

Ruolo del Numero di Neper in Economia Consideriamo un capitale C che ad un certo istante $t_0 \equiv 0$ viene investito da un agente in una attività economica o finanziaria per un certo intervallo di tempo. All'istante terminale t del tempo di investimento, l'agente liquida la propria posizione nell'investimento ricavando una cifra $M(t)$, cosiddetta *montante* dell'investimento al tempo t . La quantità

$$I(t) \stackrel{\text{def}}{=} M(t) - C$$

è il cosiddetto *interesse* dell'investimento al tempo t . Le quantità

$$i(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I(t)}{C}, \quad r(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M(t)}{C},$$

sono rispettivamente chiamate, *tasso di interesse* e *fattore di capitalizzazione* dell'investimento al tempo t . L'impiego del fattore di capitalizzazione consente di scrivere una comoda relazione tra il montante di un investimento ed il capitale iniziale, ossia

$$M(t) = Cr(t) \tag{1.1}$$

inoltre il fattore di capitalizzazione è legato al tasso di interesse mediante la

$$r(t) = 1 + i(t). \tag{1.2}$$

Gli investimenti in una attività economica, ed ancor più finanziaria, sono generalmente caratterizzati dal tasso di interesse offerto all'investitore.

Pertanto, mediante la (1.1) e (1.2), l'investitore potrà determinare il montante ricavato da un suo investimento a fronte dell'impiego di un capitale iniziale. Tra le varie forme assunte dalla funzione tasso di interesse $i(t)$ la più elementare, ancorchè economicamente significativa, è il cosiddetto *interesse semplice*, caratterizzato dalla struttura

$$i(t) \stackrel{\text{def}}{=} i_p t,$$

che esprime la circostanza che il tasso di interesse sia proporzionale alla durata dell'investimento mediante una costante di proporzionalità i_p , nota come *tasso di interesse periodale*, che esprime l'interesse relativo al capitale unitario impiegato in un intervallo di tempo unitario, una volta fissate le unità di misura del denaro e del tempo. Assumendo un tale tasso di interesse, si ottengono le seguenti relazioni

$$I(t) = C i_p t, \quad (1.3)$$

$$r(t) = 1 + i_p t \quad (1.4)$$

$$M(t) = C(1 + i_p t). \quad (1.5)$$

L'investimento a tasso di interesse semplice, prevede che l'interesse dell'attività economica, che matura durante il periodo di investimento, venga corrisposto all'investitore solo al termine del periodo di investimento stesso. Non è quindi possibile investire nell'attività economica gli interessi via via maturati. Come si dice abitualmente, *gli interessi non vengono via via capitalizzati*. Consideriamo adesso la possibilità di dividere l'intervallo di investimento $[0, t]$ nei sottointervalli $[0, s]$ e $[s, t]$, con $0 < s < t$, investendo un capitale C nell'attività economica, ma capitalizzando gli interessi prodotti nell'intervallo di tempo $[0, s]$ allo stesso tasso di interesse semplice. Si ottiene stavolta un montante pari a

$$M_s(t) = (1 + i_p s)(1 + i_p(t - s))C.$$

Non è difficile rendersi conto che tale montante assume valore massimo per $s^* = t/2$ in corrispondenza del quale si ha

$$M_{s^*}(t) = C \left(1 + i_p \frac{t}{2} \right)^2.$$

Dividendo l'intervallo di tempo $[0, t]$ nei sottointervalli $[0, s_1]$, $[s_1, s_2]$ e $[s_2, t]$, con $0 < s_1 < s_2 < t$, investendo lo stesso capitale C e capitalizzando gli interessi prodotti in $[0, s_1]$ e $[s_1, s_2]$ allo stesso tasso di interesse semplice, il montante diviene

$$M_{s_1, s_2}(t) = (1 + i_p s_1)(1 + i_p(s_2 - s_1))(1 + i_p(t - s_2))C.$$

Si può allora provare che tale montante assume valore massimo per $s_1^* = t/3$, $s_2^* = 2t/3$ e che in corrispondenza si ha:

$$M_{s_1^*, s_2^*}(t) = \left(1 + i_p \frac{t}{3}\right)^3 C.$$

Procedendo ulteriormente, e dividendo l'intervallo di tempo $[0, T]$ nei sottointervalli $[0, s_1]$, $[s_1, s_2]$, ..., $[s_{n-2}, s_{n-1}]$, $[s_{n-1}, t]$, con $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{n-2} < s_{n-1} < t$, investendo lo stesso capitale C e capitalizzando gli interessi prodotti in tutti i sottointervalli allo stesso tasso di interesse semplice, il montante diviene

$$M_{s_1, s_2, \dots, s_{n-1}}(t) = (1 + i_p s_1)(1 + i_p(s_2 - s_1)) \cdots (1 + i_p(s_{n-2} - s_{n-1}))(1 + i_p(t - s_{n-1}))C.$$

Si può provare che tale montante assume valore massimo per $s_1^* = t/n$, $s_2^* = 2t/n$, ..., $s_{n-2}^* = (n-2)t/n$, $s_{n-1}^* = (n-1)t/n$, ed in corrispondenza:

$$M_{s_1^*, s_2^*, \dots, s_{n-1}^*}(t) = \left(1 + i_p \frac{t}{n}\right)^n C.$$

Al limite, se si potesse effettuare una capitalizzazione “continua” degli interessi prodotti, sempre allo stesso tasso di interesse semplice, si otterrebbe

$$M_\infty(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} C \left(1 + i_p \frac{t}{n}\right)^n = C \exp(i_p t).$$

In particolare se $i_p = 1$, $C = 1$, $t = 1$,

$$M = e.$$

Pertanto il numero di Neper e esprime il montante prodotto da una capitalizzazione semplice, ma continua, a tasso periodale unitario di un capitale unitario in un intervallo di tempo unitario.