Note di Matematica Generale

Roberto Monte

November 23, 2005

Contents

Chapter 1

Elementi di Topologia di $\mathbb{R}^n$

1.1 Distanza Euclidea, Dischi Aperti, Sfere, Dischi Chiusi

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^n$ di tutte le n-ple ordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ di numeri reali.

Definition 1 *Chiamiamo l'insieme* $\mathbb{R}^n$ spazio reale n-dimensionale *e ci riferiamo ad una n-pla $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ come ad un* punto $P \in \mathbb{R}^n$.

Definition 2 *Dati due punti $P \equiv (x_1, \ldots, x_n), Q \equiv (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ diciamo che P* concide *con Q, e scriviamo $P = Q$, se e solo se*

$$x_k = y_k, \quad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Definition 3 *Comunque dati due punti $P \equiv (x_1, \ldots, x_n), Q \equiv (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ chiamiamo* distanza euclidea *di P da Q, e la denotiamo con il simbolo $d(P, P)$, il numero reale*

$$d(P, Q) \equiv \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2}.$$

Example 4 *Nel caso in cui $n = 1$, e quindi $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$, posto $P \equiv x$ e $Q \equiv y$ si ha*

$$d(P, Q) \equiv \left((x - y)^2 \right)^{1/2} = |x - y| .$$

Example 5 *Nel caso in cui $n = 2$, e quindi $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$, posto $P \equiv (x_1, x_2)$ e $Q \equiv (y_1, y_2)$ si ha*

$$d(P, Q) \equiv \left(\sum_{k=1}^{2} (x_k - y_k)^2 \right)^{1/2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Example 6 *Nel caso in cui $n = 3$, e quindi $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3$, posto $P \equiv (x_1, x_2, x_3)$ e $Q \equiv (y_1, y_2, y_3)$ si ha*

$$d(P,Q) \equiv \left(\sum_{k=1}^{3}(x_k - y_k)^2\right)^{1/2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Proposition 7 *Per ogni scelta dei punti $P, Q, R \in \mathbb{R}^n$ risulta:*

Positività *$d(P,Q) \geq 0$;*

Nullità *$d(P,Q) = 0$ se e solo se $P = Q$;*

Simmetria *$d(P,Q) = d(Q,P)$;*

Disuguaglianza Triangolare *$d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R)$.*

Dimostrazione. Comunque considerati $P \equiv (x_1, \ldots, x_n), Q \equiv (y_1, \ldots, y_n)$ si ha evidentemente

$$d(P,Q) \equiv \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right)^{1/2} \geq 0.$$

Inoltre si ha

$$d(P,Q) \equiv 0$$

se e solo se

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right)^{1/2} = 0.$$

Ossia, se e solo se

$$(x_k - y_k)^2 = 0,$$

per ogni $k = 1, \ldots, n$. Ciò comporta chiaramente che

$$x_k - y_k = 0,$$

per ogni $k = 1, \ldots, n$. Quindi,

$$P = Q.$$

Altrettanto evidentemente si ha

$$d(P,Q) \equiv \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k)^2\right)^{1/2} \equiv d(Q,P).$$

Non rimane quindi che provare la disuguaglianza triangolare 7 per pgni terna di punti $P \equiv (x_1, \ldots, x_n), Q \equiv (y_1, \ldots, y_n), R \equiv (z_1, \ldots, z_n)$. A tale scopo osserviamo preliminarmente che, comunque scelti $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}. \tag{1.1}$$

Per rendersi conto di ciò, poniamo per brevità di scrittura $a \equiv \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}$ e $b \equiv \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}$. Rilevato quindi quindi che la disuguaglianza (1.1) è chiaramente vera se almeno uno tra a e b è nullo, consideriamo il caso in cui a e b siano entrambi non nulli. In questo caso, dalla disuguaglianza evidente

$$\left(\frac{|a_k|}{a} - \frac{|b_k|}{b}\right)^2 \geq 0,$$

per ogni $k = 1, \ldots, n$, si ottiene

$$2\frac{|a_k b_k|}{ab} \leq \frac{a_k^2}{a^2} + \frac{b_k^2}{b^2},$$

per ogni $k = 1, \ldots, n$. Sommando su k segue allora

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k b_k|}{ab} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{b^2},$$

ossia

$$\frac{2}{ab}\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \frac{1}{a^2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{1}{b^2}\sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Da quest'ultima, per come definiti a e b, si ha

$$\frac{2}{ab}\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq 2,$$

ossia

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq ab,$$

che esprime proprio la (1.1). In virtù di quest'ultima, possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2 \\
= \; & \sum_{k=1}^{n}((x_k - y_k) + (y_k - z_k))^2 \\
= \; & \sum_{k=1}^{n}((x_k - y_k)^2 + 2(x_k - y_k)(y_k - x_k) + (y_k - z_k)^2) \\
= \; & \sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)(y_k - z_k) + \sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2 \\
\leq \; & \sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2 + 2\sum_{k=1}^{n}|x_k - y_k|\,|y_k - z_k| + \sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2 \\
\leq \; & \sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2\right)^{1/2} + \sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2 \\
= \; & \left(\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2\right)^{1/2}\right)^2
\end{aligned}$$

quindi, estraendo la radice quadrata dal primo ed ultimo membro della soprastante catena di disuguaglianze, otteniamo

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2\right)^{1/2},$$

che non è altro che la disuguaglianza triangolare 7 desiderata. ■

Definition 8 *Chiamiamo l'insieme* $\mathbb{R}^n$ *dotato della distanza euclidea* spazio euclideo reale n-dimensionale.

Definition 9 *Dati un punto* $P \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *ed un numero reale* $r > 0$, *chiamiamo* disco aperto *di centro* P *e raggio* r *l'insieme*

$$\mathbb{B}(P; r) \equiv \{Q \equiv (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid d(Q, P) < r\}.$$

Chiamiamo sfera *di centro* P *e raggio* r *l'insieme*

$$\mathbb{S}(P; r) \equiv \{Q \equiv (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid d(Q, P) = r\}.$$

Chiamiamo disco chiuso *di centro* P *e raggio* r *l'insieme*

$$\mathbb{D}(P_0; r_0) \equiv \{Q \equiv (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid dQ, P) \leq r\}.$$

Example 10 *Nel caso in cui* $n = 1$, *posto* $P \equiv x$, *si ha*

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}(P;r) &= \{Q \equiv y \in \mathbb{R} \mid |y-x| < r\} = (x-r, x+r), \\
\mathbb{S}(P;r) &= \{Q \equiv y \in \mathbb{R} \mid |y-x| = r\} = \{x-r, x+r\}, \\
\mathbb{D}(P;r) &= \{Q \equiv y \in \mathbb{R} \mid |y-x| \leq r\} = [x-r, x+r]\,.
\end{aligned}$$

Ossia, rispettivamente l'intervallo aperto di centro x *ed estremi* $x-r$ *ed* $x+r$, *gli stessi estremi* $x-r$ *ed* $x+r$ *di tale intervallo, e l'intervallo chiuso di centro* x *ed estremi* $x-r$ *ed* $x+r$.

Example 11 *Nel caso in cui* $n = 2$, *posto* $P \equiv (x_1, x_2)$, *si ha*

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}(P;r) &= \{Q \equiv (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid ((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2)^{1/2} < r\} \\
&= \{Q \equiv (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 < r^2\}, \\
\\
\mathbb{S}(P;r) &= \{Q \equiv (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid ((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2)^{1/2} = r\} \\
&= \{Q \equiv (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 = r^2\}, \\
\\
\mathbb{D}(P;r) &= \{Q \equiv (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid ((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2)^{1/2} \leq r\} \\
&= \{Q \equiv (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 \leq r^2\}.
\end{aligned}$$

Ossia, rispettivamente il disco senza bordo di centro (x_1, x_2) *e raggio* r, *il cerchio di centro* (x_1, x_2) *e raggio* r *ed il disco con bordo di centro* (x_1, x_2) *e raggio* r.

Example 12 *Nel caso in cui* $n = 3$, *posto* $P \equiv (x_1, x_2, x_3)$, *si ha*

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}(P;r) &= \{Q \equiv (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid ((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2)^{1/2} < r\} \\
&= \{Q \equiv (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2 < r^2\}, \\
\\
\mathbb{S}(P;r) &= \{Q \equiv (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid ((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2)^{1/2} = r\} \\
&= \{Q \equiv (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2 = r^2\}, \\
\\
\mathbb{D}(P;r) &= \{Q \equiv (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid ((y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2)^{1/2} \leq r\} \\
&= \{Q \equiv (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + (y_3-x_3)^2 \leq r^2\}.
\end{aligned}$$

Ossia, rispettivamente la palla privata di superficie di centro (x_1, x_2, x_3) *e raggio* r, *la sfera di centro* (x_1, x_2, x_3) *e raggio* r *e la palla comprensiva di superficie di centro* (x_1, x_2, x_3) *e raggio* r.

1.2 Punti Interni, Punti Esterni, Punti di Frontiera, Punti di Chiusura, Punti di Accumulazione, Punti Isolati

Sia $\mathbb{X}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e sia $P \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definition 13 (Punto Interno) *Diciamo che il punto P è* interno *ad $\mathbb{X}$, o anche che $\mathbb{X}$ è un* intorno *di P, se esiste $r > 0$ tale che $\mathbb{B}(P; r) \subseteq \mathbb{X}$. Chiamiamo* interiore *di $\mathbb{X}$ l'insieme dei punti interni ad $\mathbb{X}$ e lo indichiamo con la notazione $\mathring{\mathbb{X}}$.*

Remark 14 *Se P è interno ad $\mathbb{X}$ in particolare risulta $P \in \mathbb{X}$. In simboli, $\mathring{\mathbb{X}} \subseteq \mathbb{X}$.*

Example 15 *Sia $n = 1$ e sia $\mathbb{X}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Un punto $P \equiv x$ è interno ad $\mathbb{X}$ se esiste $r > 0$ tale che $(x - r, x + r) \subseteq \mathbb{X}$.*

Example 16 *Sia $n = 1$ e sia $\mathbb{X} \equiv (a, b)$. Allora ogni punto di $\mathbb{X}$ é interno ad $\mathbb{X}$. In simboli, $\overset{\circ}{(a, b)} = (a, b)$.*

Dimostrazione. Comunque considerato $P \equiv x \in (a, b)$ risulta $a < x < b$. Pertanto $\min\{x - a, b - x\} > 0$. Posto allora $r \equiv \min\{x - a, b - x\}$, risulta

$$(x - r, x + r) \subseteq (a, b). \tag{1.2}$$

Infatti, $y \in (x - r, x + r)$ se e solo se si ha

$$x - r < y < x + r. \tag{1.3}$$

D'altra parte, supposto $r = x - a$, otteniamo

$$x - r = x - (x - a) = a,$$

e

$$x + r \leq x + b - x = b.$$

Cosicchè dalla (1.3) segue

$$a < y < b. \tag{1.4}$$

Analogamente, supposto $r = b - x$, otteniamo

$$a = x - (x - a) \leq x - r,$$

e

$$x + r = x + b - x = b.$$

Cosicchè dalla (1.3) abbiamo ancora la (1.4). In definitiva, la (1.3) comporta in ogni caso la (1.4) e ciò prova la (1.2).

Example 17 *Sia $n = 1$ e sia $\mathbb{X}$ un intervallo di $\mathbb{R}$ di estremi a e b, ossia$\mathbb{X} \equiv (a, b)$, o $\mathbb{X} \equiv [a, b]$,o $\mathbb{X} \equiv (a, b]$, o $\mathbb{X} \equiv [a, b)$, si ha in ogni caso $\mathring{\mathbb{X}} = (a, b)$.*

Example 18 *Sia $n = 1$ e sia $\mathbb{X}$ una semiretta destra di estremo a. Ossia$\mathbb{X} \equiv (a, +\infty)$, o $\mathbb{X} \equiv [a + \infty)$. Si ha in entrambi i casi $\mathring{\mathbb{X}} = (a + \infty)$.*

Example 19 *Sia $n = 1$ e sia $\mathbb{X}$ una semiretta sinistra di estremo a. Ossia $\mathbb{X} \equiv (-\infty, a)$, o $\mathbb{X} \equiv (-\infty, a]$. Si ha in entrambi i casi $\mathring{\mathbb{X}} = (-\infty, a)$.*

Example 20 *Sia $n = 2$ e sia $\mathbb{X}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$. Un punto $P \equiv (x_1, x_2)$ è interno ad $\mathbb{X}$ se esiste $r > 0$ tale che*

$$\{Q \equiv (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 \leq r^2\} \subseteq \mathbb{X}.$$

Example 21 *Sia $n = 2$ e sia $\mathbb{X} \equiv \mathbb{B}(P; r)$ per un certo $P \in \mathbb{R}^2$ ed un certo $r > 0$. Allora ogni punto di $\mathbb{X}$ é interno ad $\mathbb{X}$.*

Dimostrazione. Ovviamente il punto P é interno ad $\mathbb{X}$. Sia quindi $Q \in \mathbb{B}(P; r)$, $Q \neq P$. Risulta allora

$$0 < d(Q, P) < r.$$

Pertanto $s \equiv \min\{d(Q, P), r - d(Q, P)\} > 0$. Vogliamo adesso provare che si ha

$$\mathbb{B}(Q; s) \subseteq \mathbb{B}(P; r). \tag{1.5}$$

Infatti, per ogni $R \in \mathbb{B}(Q; s)$ risulta

$$d(R, Q) < s.$$

Quindi, dalla disuguaglianza triangolare 7, otteniamo

$$d(R, P) \leq d(R, Q) + d(Q, P) < s + d(Q, P) \leq r - d(Q, P) + d(Q, P) = r.$$

In definitiva,

$$d(R, P) < r$$

e ciò prova la (1.5).

Example 22 *Sia $n = 2$ e sia $\mathbb{X} \equiv \mathbb{B}(P; r)$ o $\mathbb{X} \equiv \mathbb{D}(P; r)$ per un certo $P \in \mathbb{R}^2$ ed un certo $r > 0$. Si ha in ogni caso $\mathring{\mathbb{X}} = \mathbb{B}(P; r)$.*

Definition 23 (Punto Esterno) *Diciamo che il punto P è* esterno *ad $\mathbb{X}$ se esiste $r > 0$ tale che $\mathbb{B}(P; r) \subseteq \mathbb{X}^c_{\mathbb{R}^n}$. In altri termini, un punto P è* esterno *ad $\mathbb{X}$ se è interno a $\mathbb{X}^c_{\mathbb{R}^n}$.*

Remark 24 *Se P è esterno ad $\mathbb{X}$ in particolare risulta $P \notin \mathbb{X}$.*

Definition 25 (Punto di Frontiera) *Diciamo che il punto P è di* frontiera *per $\mathbb{X}$ se P non è né interno né esterno ad $\mathbb{X}$. Chiamiamo* frontiera *di $\mathbb{X}$ l'insieme dei punti di frontiera per $\mathbb{X}$ e lo indichiamo con la notazione $Fr(\mathbb{X})$.*

Example 26 *Sia $n = 1$ e sia $\mathbb{X}$ un intervallo limitato di estremi a e b. Ossia$\mathbb{X} \equiv (a, b)$, o $\mathbb{X} \equiv [a, b]$,o $\mathbb{X} \equiv (a, b]$, o $\mathbb{X} \equiv [a, b)$. Si ha in ogni caso $Fr(\mathbb{X}) = \{a, b\}$.*

Example 27 *Sia $n = 1$ e sia $\mathbb{X}$ una semiretta di estremo a. Ossia$\mathbb{X} \equiv (a, +\infty)$, o $\mathbb{X} \equiv [a + \infty)$,o $\mathbb{X} \equiv (-\infty, a)$, o $\mathbb{X} \equiv (-\infty, a]$. Si ha in ogni caso $Fr(\mathbb{X}) = \{a\}$.*

Example 28 *Sia $n = 2$ e sia $\mathbb{X} \equiv \mathbb{B}(P; r)$, o $\mathbb{X} \equiv \mathbb{D}(P; r)$, o $\mathbb{X} \equiv \mathbb{S}(P; r)$ per un certo $P \in \mathbb{R}^2$ ed un certo $r > 0$. Si ha in ogni caso $Fr(\mathbb{X}) = \mathbb{S}(P; r)$.*

Definition 29 (Punto di Chiusura) *Diciamo che il punto P è di* chiusura *per $\mathbb{X}$ se per ogni $r > 0$ risulta $\mathbb{B}(P; r) \cap \mathbb{X} \neq \emptyset$. Chiamiamo* chiusura *di $\mathbb{X}$ l'insieme dei punti di chiusura per $\mathbb{X}$ e lo indichiamo con la notazione $\bar{\mathbb{X}}$..*

Example 30 *Sia $n = 1$ e sia $\mathbb{X}$ un intervallo limitato di estremi a e b. Ossia$\mathbb{X} \equiv (a, b)$, o $\mathbb{X} \equiv [a, b]$,o $\mathbb{X} \equiv (a, b]$, o $\mathbb{X} \equiv [a, b)$. Si ha in ogni caso $\bar{\mathbb{X}}$.$= [a, b]$.*

Example 31 *Sia $n = 1$ e sia $\mathbb{X}$ una semiretta destra di estremo a. Ossia$\mathbb{X} \equiv (a, +\infty)$, o $\mathbb{X} \equiv [a + \infty)$. Si ha in entrambi i casi $\bar{\mathbb{X}} = [a + \infty)$.*

Example 32 *Sia $n = 1$ e sia $\mathbb{X}$ una semiretta sinistra di estremo a. Ossia $\mathbb{X} \equiv (-\infty, a)$, o $\mathbb{X} \equiv (-\infty, a]$. Si ha in entrambi i casi $\bar{\mathbb{X}} = (-\infty, a]$.*

Example 33 *Sia $n = 2$ e sia $\mathbb{X} \equiv \mathbb{B}(P; r)$ o $\mathbb{X} \equiv \mathbb{D}(P; r)$ per un certo $P \in \mathbb{R}^2$ ed un certo $r > 0$. Si ha in entrambi i casi $\bar{\mathbb{X}} = \mathbb{D}(P; r)$*

Example 34 *Sia $n = 2$ e sia $\mathbb{X} \equiv \mathbb{S}(P; r)$ per un certo $P \in \mathbb{R}^2$ ed un certo $r > 0$. Allora $\bar{\mathbb{X}} = \mathbb{S}(P; r)$.*

Proposition 35 *Risulta*

$$Fr(\mathbb{X}) = \bar{\mathbb{X}} \cap \overline{\mathbb{X}^c_{\mathbb{R}^n}}.$$

Definition 36 (Punto di Accumulazione) *Diciamo che il punto P è di* accumulazione *per $\mathbb{X}$ se per ogni $r > 0$ risulta $\mathbb{B}(P; r) - \{P\} \cap \mathbb{X} \neq \emptyset$. Indichiamo l'insieme dei punti di accumulazione per $\mathbb{X}$ con la notazione $\partial\mathbb{X}$ e lo chiamiamo* derivato *di $\mathbb{X}$.*

Remark 37 *Il punto P è di accumulazione per $\mathbb{X}$ se e solo se per ogni $r > 0$ il disco aperto $\mathbb{B}(P; r)$ contine infiniti punti di $\mathbb{X}$.*

Remark 38 *Se P è un punto di accumulazione per $\mathbb{X}$ allora P è anche un punto di chiusura, ma non è in generale vero il viceversa.*

Example 39 *Sia $n = 1$ e sia $\mathbb{X} \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1/n,\ n \in \mathbb{N}\}$ E' facile rendersi conto che $\partial\mathbb{X} = \{0\}$ e che $\bar{\mathbb{X}} = \mathbb{X} \cup \{0\}$.*

Definition 40 (Punto Isolato) *Diciamo che il punto P è un punto* isolato *di $\mathbb{X}$ se $P \in \mathbb{X} - \partial\mathbb{X}$. Indichiamo l'insieme dei punti isolati di $\mathbb{X}$ con la notazione $I(\mathbb{X})$.*

Remark 41 *Il punto P è un punto isolato di $\mathbb{X}$ se e solo se $P \in \mathbb{X}$ ed esiste $r > 0$ tale che il disco aperto $\mathbb{B}(P; r)$ non contenga alcun punto di $\mathbb{X}$ distinto da P.*

Example 42 *Sia $n = 1$ e sia $\mathbb{X} \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1/n,\ n \in \mathbb{N}\}$ E' facile rendersi conto che $I(\mathbb{X}) = \mathbb{X}$.*

Proposition 43 *Risulta*

$$\bar{\mathbb{X}} = \partial\mathbb{X} \cup I(\mathbb{X}).$$

1.3 Insiemi Aperti, Insiemi Chiusi, Compatti

Sia $\mathbb{X}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$.

Definition 44 (Insieme Aperto) *Diciamo che* $\mathbb{X}$ *è* aperto *se* $\mathbb{X} = \mathring{\mathbb{X}}$. *Ossia se per ogni* $P \in \mathbb{X}$ *esiste* $r > 0$ *tale che il disco aperto* $\mathbb{B}(P; r) \subseteq \mathbb{X}$. *O ancora se* $\mathbb{X}$ *è intorno di ogni suo punto.*

Proposition 45 *L'interiore di* $\mathbb{X}$ *si caratterizza come il più grande sottoinsieme aperto di* $\mathbb{R}^n$ *contenuto in* $\mathbb{X}$.

Definition 46 (Insieme Chiuso) *Diciamo che* $\mathbb{X}$ *è chiuso se l'insieme* $\mathbb{X}^c \equiv \mathbb{R}^n - \mathbb{X}$ *è aperto.*

Proposition 47 *L'insieme* $\mathbb{X}$ *è chiuso se e solo se* $Fr(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{X}$.

Proposition 48 *L'insieme* $\mathbb{X}$ *è chiuso se e solo se* $\mathbb{X} = \bar{\mathbb{X}}$.

Proposition 49 *L'insieme* $\mathbb{X}$ *è chiuso se e solo se* $\partial\mathbb{X} \subseteq \mathbb{X}$.

Proposition 50 *La chiusura di* $\mathbb{X}$ *si caratterizza come il più piccolo sottoinsieme chiuso di* $\mathbb{R}^n$ *contenente* $\mathbb{X}$.

Definition 51 *Diciamo che* $\mathbb{X}$ *è* limitato *se è possibile determinare un punto* $P \in \mathbb{R}^n$ *ed un numero reale* $r > 0$ *tali che l'insieme* $\mathbb{X}$ *sia contenuto in* $\mathbb{D}(P; r)$.

Definition 52 *Diciamo che* $\mathbb{X}$ *è* compatto *se* $\mathbb{X}$ *è chiuso e limitato.*