

# Note di Matematica Generale

Roberto Monte

November 13, 2006

ABSTRACT These notes are still a work in progress and are intended to be for internal use. Please, don't cite or quote.

# 1

## Elementi di Teoria Elementare delle Funzioni Reali di Una Variabile Reale

### 1.1 Nozioni Preliminari di Topologia dello Spazio Reale Euclideo $\mathbb{R}$

Assumeremo note le caratteristiche elementari dell'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  che identificheremo con una retta euclidea dotata di un sistema di coordinate, ossia di un punto origine  $O$ , di un verso di percorrenza e di una unità di misura. Di conseguenza un numero reale  $x$  verrà identificato con il punto  $P$  della retta la cui distanza dall'origine rispetto all'unità di misura fissata sia espressa da  $|x|$  e che sia situato a destra o a sinistra dell'origine  $O$  secondoche  $x$  sia strettamente positivo o negativo. In particolare, il numero 0 verrà identificato con l'origine  $O$  stessa ed il numero 1 con l'estremo  $U$  del segmento sulla retta che spiccato da  $O$  costituisce l'unità di misura fissata.

#### 1.1.1 Intervalli e Semirette

Siano  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $a \leq b$ .

**Definizione** Chiamiamo *intervallo aperto* di  $\mathbb{R}$  di estremi  $a$  e  $b$  l'insieme

$$(a, b) \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

**Definizione** Chiamiamo *intervallo chiuso* di  $\mathbb{R}$  di estremi  $a$  e  $b$  l'insieme

$$[a, b] \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

**Definizione** Chiamiamo *intervallo aperto-chiuso* di  $\mathbb{R}$  di estremi  $a$  e  $b$  l'insieme

$$(a, b] \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

**Definizione** Chiamiamo *intervallo chiuso-aperto* di  $\mathbb{R}$  di estremi  $a$  e  $b$  l'insieme

$$[a, b) \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

**Osservazione** Si noti che se  $a = b$  risulta

$$(a, b) = (a, b] = [a, b) = \emptyset,$$

mentre

$$[a, b] = \{a\} = \{b\}.$$

Sia  $a \in \mathbb{R}$ .

**Definizione** Chiamiamo *semiretta destra aperta* di  $\mathbb{R}$  di estremo  $a$  l'insieme

$$(a, +\infty) \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}.$$

**Definizione** Chiamiamo *semiretta destra chiusa* di  $\mathbb{R}$  di estremo  $a$  l'insieme

$$[a, +\infty) \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}.$$

**Definizione** Chiamiamo *semiretta sinistra aperta* di  $\mathbb{R}$  di estremo  $a$  l'insieme

$$(-\infty, a) \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}.$$

**Definizione** Chiamiamo *semiretta sinistra chiusa* di  $\mathbb{R}$  di estremo  $a$  l'insieme

$$(-\infty, a] \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}.$$

### 1.1.2 Punti Interni

Sia  $\mathbb{R}$  l'insieme dei numeri reali, sia  $U$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  e sia  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definizione** Diciamo che  $x$  è un *punto interno* ad  $U$  se esiste  $\delta_x > 0$  tale che

$$(x - \delta_x, x + \delta_x) \subseteq U.$$

Ossia, se esiste un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  centrato in  $x$  interamente contenuto in  $U$ .

**Osservazione** Se  $x$  è un *punto interno* ad  $U$  in particolare  $x \in U$ .

**Definizione** Chiamiamo *interione* o *parte interna* di  $U$ , e la denotiamo con  $\overset{\circ}{U}$ , l'insieme dei punti interni ad  $U$ .

**Esempio** Comunque considerati  $a, b \in \mathbb{R}$ , tali che  $a < b$ , ogni punto dell'intervallo aperto  $(a, b)$  di  $\mathbb{R}$  è interno a ciascuno degli intervalli  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  ed  $(a, b)$  stesso. In simboli,

$$[a, b]^\circ = [a, b)^\circ = (a, b]^\circ = (a, b)^\circ = (a, b).$$

**Dimostrazione** Mostriamo che comunque considerati  $a, b \in \mathbb{R}$  tali che  $a < b$ , ogni punto dell'intervallo aperto  $(a, b)$  di  $\mathbb{R}$  è interno ad  $(a, b)$  stesso. Infatti, per ogni  $x \in (a, b)$ , si ha chiaramente sia  $x - a > 0$  che  $b - x > 0$ . Pertanto, scelto

$$\delta = \frac{1}{2} \min\{x - a, b - x\},$$

si ha  $\delta > 0$  ed inoltre risulta

$$\delta \leq \frac{1}{2}(x - a) < x - a \quad \text{e} \quad \delta \leq \frac{1}{2}(b - x) < b - x.$$

Da queste ultime segue

$$x - \delta > x - (x - a) = a \quad \text{e} \quad x + \delta < x + (b - x) = b.$$

In definitiva,

$$(x - \delta, x + \delta) \subseteq (a, b).$$

□

### 1.1.3 Punti di Accumulazione

Sia  $\mathbb{R}$  l'insieme dei numeri reali, sia  $U$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  e sia  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definizione** Diciamo che  $x$  è un *punto di accumulazione* per  $U$  se per ogni  $\delta > 0$  si ha

$$(x - \delta, x + \delta) - \{x\} \cap U \neq \emptyset.$$

Ossia se ogni intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  centrato in  $x$  e privato di  $x$  ha intersezione non vuota con  $U$ .

Più specificatamente possiamo asserire che

**Definizione** Diciamo che  $x$  è un *punto di accumulazione sinistro* [resp. *punto di accumulazione destro*] per  $U$  se per ogni  $\delta > 0$  si ha

$$(x - \delta, x) \cap U \neq \emptyset, \quad [(x, x + \delta) \cap U \neq \emptyset].$$

Ossia se ogni intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  avente per estremo destro [resp. estremo sinistro]  $x$  ha intersezione non vuota con  $U$ .

**Osservazione** Il punto  $x$  è di accumulazione per  $U$ , se e solo se in ogni intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  centrato in  $x$  esistono infiniti punti di  $U$  distinti da  $x$ .

**Osservazione** Il punto  $x$  è di accumulazione per  $U$ , se e solo se esiste  $(x_n)_{n \geq 1}$  successione di punti di  $U$  distinti da  $x$  tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

**Osservazione** Se  $x$  è un punto interno ad  $U$ , allora  $x$  è un punto di accumulazione per  $U$ . Non è chiaramente vero il viceversa.

**Definizione** Chiamiamo *derivato* di  $U$ , e lo denotiamo con  $D(U)$ , l'insieme dei punti di accumulazione per  $U$ .

**Esempio** Comunque considerati  $a, b \in \mathbb{R}$ , tali che  $a < b$ , per ciascuno degli intervalli  $(a, b)$ ,  $[a, b]$ ,  $[a, b)$  ed  $(a, b]$  di  $\mathbb{R}$  l'insieme dei punti di accumulazione è costituito dall'intero intervallo  $[a, b]$ . In simboli

$$D((a, b)) = D([a, b]) = D([a, b)) = D((a, b]) = [a, b].$$

**Esempio** Il punto 0 è il solo punto di accumulazione per il sottoinsieme  $U \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1/n, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ .

#### 1.1.4 Punti Isolati

Sia  $\mathbb{R}$  l'insieme dei numeri reali, sia  $U$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  e sia  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definizione** Diciamo che  $x$  è un *punto isolato* di  $U$  se esiste  $\delta_x > 0$  tale che

$$(x - \delta_x, x + \delta_x) \cap U = \{x\}.$$

**Osservazione** Se  $x$  è un *punto isolato* di  $U$  in particolare  $x \in U$ .

**Definizione** Denotiamo con  $I(U)$  l'insieme dei punti isolati di  $U$ .

**Osservazione** Un punto  $x \in U$  è isolato se e solo se non è di accumulazione. In simboli,

$$I(U) \cap D(U) = \emptyset$$

**Esempio** Tutti i punti del sottoinsieme  $U \equiv \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1/n, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$  sono isolati.

### 1.1.5 Punti Aderenti

Sia  $\mathbb{R}$  l'insieme dei numeri reali, sia  $U$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  e sia  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definizione** Diciamo che  $x$  è un *punto aderente* ad  $U$  se e solo se per ogni  $\delta > 0$  si ha

$$(x - \delta, x + \delta) \cap U \neq \emptyset.$$

Ossia se ogni intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  centrato in  $x$  ha intersezione non vuota con  $U$ .

**Definizione** Chiamiamo *chiusura* di  $U$ , e lo denotiamo con  $\bar{U}$ , l'insieme dei punti aderenti ad  $U$ .

**Osservazione** Il punto  $x$  è aderente ad  $U$  se e solo se  $x$  è isolato oppure di accumulazione. In simboli

$$\bar{U} = I(U) \cup D(U).$$

**Osservazione** Il punto  $x$  è di aderenza per  $U$  se e solo se  $x$  non è interno ad  $U_{\mathbb{R}}^c$ . In simboli

$$\bar{U} = \left( U_{\mathbb{R}}^c \right)_{\mathbb{R}}^{\circ c}.$$

**Osservazione** Il punto  $x$  è interno ad  $U$  se e solo se  $x$  non è aderente a  $U_{\mathbb{R}}^c$ . In simboli

$$U^{\circ} = \left( \bar{U}_{\mathbb{R}}^c \right)_{\mathbb{R}}^c.$$

### 1.1.6 Punti Esterni

Sia  $\mathbb{R}$  l'insieme dei numeri reali, sia  $U$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  e sia  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definizione** Diciamo che  $x$  è un *punto esterno* ad  $U$  se esiste  $\delta_x > 0$  tale che

$$(x - \delta_x, x + \delta_x) \cap U = \emptyset.$$

Ossia, se esiste un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  centrato in  $x$  interamente non contenuto in  $U$ .

**Osservazione** Il punto  $x$  è esterno ad  $U$  se e solo se è interno a  $U_{\mathbb{R}}^c$ . Ossia se  $x \in U_{\mathbb{R}}^c$ .

**Osservazione** Se  $x$  è un *punto esterno* ad  $U$  in particolare  $x \notin U$ .

### 1.1.7 Punti di Frontiera

Sia  $\mathbb{R}$  l'insieme dei numeri reali, sia  $U$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  e sia  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definizione** Diciamo che  $x$  è un *punto di frontiera* per  $U$  se  $x$  è aderente ad  $U$  ed a  $U_{\mathbb{R}}^c$ .

**Definizione** Chiamiamo *frontiera* di  $U$ , e lo denotiamo con  $F(U)$ , l'insieme dei punti di frontiera per  $U$ .

**Osservazione** Risulta

$$F(U) = \bar{U} \cap (\overline{U_{\mathbb{R}}^c}).$$

**Osservazione** Il punto  $x$  è di frontiera per  $U$  se e solo se non è né interno né esterno ad  $U$ . Ossia

$$F(U) = \mathring{U}_{\mathbb{R}}^c \cap \left( \mathring{U}_{\mathbb{R}}^c \right)_{\mathbb{R}}^c.$$

## 1.2 Funzioni Reali di Una Variabile Reale

### 1.2.1 Dominio

Sia  $f$  una regola che consente di associare numeri reali a punti della retta reale euclidea  $\mathbb{R}$ .

**Definizione** Chiamiamo *dominio* della funzione reale definita dalla regola  $f$ , e lo denotiamo con il simbolo  $D_f$ , il sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  per ogni punto  $P \equiv x$  del quale è univocamente definito il numero reale  $f(P) \equiv f(x)$  associato a  $P$  dalla regola  $f$ , noto come *valore* di  $f$  in  $P$ , o valore di  $f$  in  $x$ .

Sia  $D_f$  il dominio della funzione reale definita dalla regola  $f$ .

**Notazione** Denotiamo tale funzione con il simbolo  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ , o anche, per brevità, con il solo simbolo  $f$ , qualora ciò non dia adito ad equivoci.

Siano  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni reali di variabile reale tali che  $D_f \cap D_g \neq \emptyset$ .

**Definizione** Chiamiamo *somma* di  $f$  e  $g$  la funzione  $f + g : D_{f+g} \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo

$$(f + g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x), \quad \forall x \in D_{f+g},$$

essendo  $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ .

**Definizione** Chiamiamo *prodotto* di  $f$  e  $g$  la funzione  $f \cdot g : D_{f \cdot g} \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo

$$(f \cdot g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \cdot g(x), \quad \forall x \in D_{f \cdot g},$$

essendo  $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$ .

**Definizione** Chiamiamo *rapporto* di  $f$  e  $g$  la funzione  $f \div g : D_{f \div g} \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo

$$(f \div g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \forall x \in D_{f \div g},$$

essendo  $D_{f \div g} \equiv D_f \cap (D_g - g^{-1}\{0\})$ .

Siano  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni reali di variabile reale tali che  $f(D_f) \cap D_g \neq \emptyset$ .

**Definizione** Chiamiamo *composta* di  $f$  con  $g$  la funzione  $g \circ f : D_{g \circ f} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(x)), \quad \forall x \in D_{g \circ f},$$

essendo  $D_{g \circ f} \equiv f^{-1}(f(D_f) \cap D_g)$ .

Sia  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale invertibile.

**Definizione** Chiamiamo *inversa* di  $f$  la funzione  $f^{-1} : D_{f^{-1}} \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \forall x \in D_f \quad \wedge \quad (f \circ f^{-1})(y) = y, \quad \forall y \in D_{f^{-1}},$$

essendo  $D_{f^{-1}} \equiv f(D_f)$ .

## 1.3 Limiti di Funzioni

Sia  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale e sia  $D_f$  sia illimitato a destra.

**Definizione** Diciamo che il limite di  $f$  per  $x$  che tende a  $+\infty$  è  $+\infty$  e scriviamo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , se per ogni  $k \in \mathbb{R}$  esiste  $x_k \in \mathbb{R}$  tale che per ogni  $x \in (x_k + \infty) \cap D_f$ , risulta

$$f(x) > k.$$

**Osservazione** L'idea contenuta nella Definizione 1.3 è che comunque fissato un confine superiore  $k$  è possibile determinare un punto  $x_k$  del dominio tale che da tale punto in avanti i valori della funzione si mantengono definitivamente al di sopra del confine fissato. L'arbitrarietà del confine  $k$  fissato, implicitamente grande, garantisce che la funzione assuma stabilmente, da un certo punto del dominio in poi, valori arbitrariamente grandi.

**Esempio** Considerata la funzione  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{\sqrt{x-1}}, \quad \forall x \in (1, +\infty),$$

proviamo che risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Infatti, arbitrariamente fissato  $k \in \mathbb{R}$ , che possiamo scegliere senz'altro positivo, la disuguaglianza

$$\frac{x}{\sqrt{x-1}} > k \quad (1.1)$$

equivale alla

$$x^2 - k^2 x + k^2 > 0$$

ed è immediato riconoscere che tale disuguaglianza è soddisfatta per ogni  $x > 1$  se  $k < 2$  e per ogni  $x > \frac{k^2(1+\sqrt{k^2-4})}{2}$  se  $k \geq 2$ . In definitiva, esiste sempre  $x_k \in \mathbb{R}$

$$x_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k < 2 \\ \frac{k^2(1+\sqrt{k^2-4})}{2} & \text{se } k \geq 2 \end{cases},$$

tale che per ogni  $x \in (x_k + \infty) \cap D_f$ , la disuguaglianza (1.1) è soddisfatta.

**Osservazione** Risulta  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  se e solo se per ogni successione  $(x_n)_{n \geq 1}$  di punti di  $D_f$  tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty.$$

**Definizione** Diciamo che il limite di  $f$  per  $x$  che tende a  $+\infty$  è  $\ell \in \mathbb{R}$  e scriviamo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ , se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$  tale che per ogni  $x \in (x_\varepsilon + \infty) \cap D_f$  risulta

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon.$$

Sia  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale e sia  $x_0$  un punto di accumulazione per  $D_f$ .

**Definizione** Diciamo che il limite di  $f$  per  $x$  che tende ad  $x_0$  è  $+\infty$  e scriviamo  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , se per ogni  $k \in \mathbb{R}$  esiste  $\delta_k > 0$  tale che per ogni  $x \in (x_0 - \delta_k, x_0 + \delta_k) \cap D_f$  risulta

$$f(x) > k.$$

**Definizione** Diciamo che il limite di  $f$  per  $x$  che tende ad  $x_0$  è  $\ell \in \mathbb{R}$  e scriviamo  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ , se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta_\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \cap D_f$  risulta

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon.$$

### 1.3.1 Limiti Notevoli

Presentiamo di seguito alcuni limiti notevoli di maggiore utilità nelle applicazioni economico-finanziarie.

**Osservazione** Esiste finito il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Tale limite è noto come numero di Neper ed è universalmente indicato con il simbolo  $e$ .

**Esercizio** Per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = e^{\alpha\beta}.$$

**Esercizio** Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

**Esercizio** Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

**Esercizio** Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

**Esercizio** Per ogni  $a \in \mathbb{R}_+$  risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\log(a)}.$$

**Esercizio** Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

**Esercizio** Per ogni  $a \in \mathbb{R}_+$  risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \log(a).$$

## 1.4 Funzioni Continue

Sia  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale e sia  $x_0 \in D_f \cap D(D_f)$ .

**Definizione** Diciamo che  $f$  è continua in  $x_0$  se risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

**Teorema (Funzioni Continue e Successioni)** La funzione  $f$  è continua in  $x_0$  se e solo se per ogni successione  $(x_n)_{n \geq 1}$  di punti di  $D_f$  tale che  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Siano  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni reali di variabile reale e sia  $x_0 \in D_f \cap D(D_f) \cap D_g \cap D(D_g)$ .

**Teorema** Se  $f$  e  $g$  sono continue in  $x_0$ , allora anche la funzione somma  $f + g : D_{f+g} \rightarrow \mathbb{R}$  e la funzione prodotto  $f \cdot g : D_{f \cdot g} \rightarrow \mathbb{R}$  (cfr 1.2.1 e 1.2.1) sono continue in  $x_0$ .

**Teorema** Se  $f$  e  $g$  sono continue in  $x_0$  e  $g(x_0) \neq 0$ , allora anche la funzione rapporto  $f \div g : D_{f \div g} \rightarrow \mathbb{R}$  (cfr 1.2.1) è continua in  $x_0$ .

Siano  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni reali di variabile reale e sia  $x_0 \in D_f \cap D(D_f)$  tale che  $f(x_0) \in D_g \cap D(D_g)$ .

**Teorema** Se  $f$  è continua in  $x_0$  e  $g$  è continua in  $y_0 \equiv f(x_0)$ , allora anche la funzione composta  $g \circ f : D_{g \circ f} \rightarrow \mathbb{R}$  (cfr 1.2.1) è continua in  $x_0$ .

Sia  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale e sia  $x_0 \in D_f \cap D(D_f)$ .

**Teorema** Se  $f$  è invertibile e continua in  $x_0$ , allora la funzione inversa  $f^{-1} : D_{f^{-1}} \rightarrow \mathbb{R}$  (cfr 1.2.1) è continua in  $y_0 \equiv f(x_0)$ .

Sia  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale essendo  $D_f$  un intervallo.

**Definizione** Diciamo che  $f$  è continua in  $D_f$  se  $f$  è continua in ogni punto  $D_f$ .

Le funzioni continue in un intervallo godono di alcune importanti proprietà che cercheremo di illustrare enunciandole rigorosamente sotto forma di Teoremi e presentando alcuni esempi e controesempi.

Sia  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale continua in  $D_f$  essendo  $D_f$  un intervallo.

**Teorema (Esistenza dei Valori Intermedi)** La funzione  $f$  assume tutti i valori compresi tra i suoi estremi inferiore e superiore. In simboli

$$\forall y \in (\inf\{f(x), x \in D_f\}, \sup\{f(x), x \in D_f\}) \quad \exists x \in D_f \mid f(x) = y.$$

In altri termini, il Teorema dell'Esistenza dei Valori Intermedi asserisce che l'immagine di un intervallo mediante una funzione continua è essa stessa un intervallo. Ciò si riflette in un'importante caratteristica del grafico della funzione, che si rivela essere una linea continua del piano cartesiano (accettando la definizione "naive" di linea continua, quale una linea che può essere tracciata sul piano senza interruzione di tracciato). Si noti tuttavia che senza specificare la natura dell'intervallo di definizione  $D_f$  non si riesce a specificare se gli estremi inferiore e superiore della funzione in  $D_f$  siano finiti o meno, né tantomeno che, qualora finiti, appartengano ad  $f(D_f)$ . Ciò è oggetto di un ulteriore teorema.

**Teorema (Esistenza del Massimo e Minimo (Weierstrass))** Se l'intervallo  $D_f$  è chiuso e limitato,  $D_f \equiv [a, b]$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , allora  $f$  ammette in  $D_f$  almeno un punto di massimo ed almeno un punto di minimo. In simboli,

$$\exists \underline{x}, \bar{x} \in D_f \mid f(\underline{x}) = \min\{f(x), x \in D_f\} \wedge f(\bar{x}) = \max\{f(x), x \in D_f\}.$$

Come conseguenza  $f(D_f)$  è essa stessa un intervallo chiuso e limitato. Specificatamente

$$f(D_f) = [\min\{f(x), x \in D_f\}, \max\{f(x), x \in D_f\}] = [f(\underline{x}), f(\bar{x})].$$

Una conseguenza elementare, ma nondimeno importante, del Teorema dell'esistenza dei valori intermedi è il Teorema dell'Esistenza degli Zeri, spesso invocato in tecniche di approssimazione.

**Teorema (Esistenza degli Zeri)** Siano  $\hat{x}, \check{x} \in D_f$  tali che  $f(\hat{x})f(\check{x}) < 0$ . Allora esiste  $x_0 \in D_f$  tale che  $f(x_0) = 0$ .

## 1.5 Funzioni Derivabili

Sia  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale e sia  $x_0 \in \mathring{D}_f$ .

**Definizione** Per ogni  $\Delta x \in \mathbb{R}$  tale che  $x_0 + \Delta x \in D_f$  chiamiamo *incremento* di  $f$  relativo al punto  $x_0$  ed all'incremento  $\Delta x$  della variabile la quantità

$$\Delta f_{x_0, \Delta x} \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

**Definition 1** Chiamiamo rapporto incrementale di  $f$  relativo al punto  $x_0$  ed all'incremento  $\Delta x$  della variabile la quantità

$$\frac{\Delta f_{x_0, \Delta x}}{\Delta x} \equiv \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

L'incremento di  $f$  relativo al punto  $x_0$  ed all'incremento  $\Delta x$  da una misura della variazione assoluta che subisce il valore della funzione al variare della variabile dal punto  $x_0$  al punto  $x_0 + \Delta x$ . Il rapporto incrementale di  $f$  relativo al punto  $x_0$  ed all'incremento  $\Delta x$  da una misura della variazione relativa che subisce il valore della funzione al variare della variabile dal punto  $x_0$  al punto  $x_0 + \Delta x$ .

**Esempio** Sia  $M(t)$  la funzione che esprime il montante (ricavo lordo) al tempo  $t$  prodotto dall'investimento al tempo 0 di un capitale  $C$  in un'attività economica o finanziaria. Investendo al tempo 0 il capitale  $C$ , al tempo  $t_0$  il montante sarà  $M(t_0)$ . Variando il tempo d'investimento da  $t_0$  ad  $t_0 + \Delta t$ , il montante subirà una variazione assoluta pari a  $\Delta M_{t_0, \Delta t} \equiv M(t_0 + \Delta t) - M(t_0)$ , mentre il *tasso di variazione* ossia il rapporto tra la variazione del capitale e la variazione del tempo di investimento, sarà dato da  $\Delta M_{t_0, \Delta t} / \Delta t$ .

**Esempio** Con riferimento al precedente Esempio, supponiamo che il montante al tempo  $t$  prodotto dall'investimento al tempo 0 di un capitale  $C$  in un'attività economica o finanziaria sia espresso dalla funzione

$$M(t) = C(1 + i_p t)$$

essendo  $i_p > 0$ . In questo caso variando il tempo di investimento da  $t_0$  a  $t_0 + \Delta t$  il montante subirà una variazione pari a

$$\Delta M_{t_0, \Delta t} = C i_p \Delta t.$$

Tale variazione risulta essere proporzionale alla variazione del tempo di investimento ed al capitale inizialmente investito. Il tasso di variazione è allora dato da

$$\frac{\Delta M_{t_0, \Delta t}}{\Delta t} = C i_p.$$

Esso risulta essere costante nel tempo e misura la rapidità con cui l'attività economica incrementa il capitale inizialmente investito. Inoltre assumendo un capitale iniziale unitario,  $C = 1$ , otterremo

$$\frac{\Delta M_{t_0, \Delta t}}{\Delta t} = i_p.$$

Dunque  $i_p$  rappresenta la rapidità di incremento nell'unità di tempo del capitale unitario, altrimenti noto come il *tasso di interesse periodale* dell'attività economica.

**Esempio** Con riferimento ai precedenti Esempi, supponiamo che il montante al tempo  $t$  prodotto dall'investimento al tempo 0 di un capitale  $C$  in un'attività economica o finanziaria sia espresso dalla funzione

$$M(t) = C(1 + i_p)^t$$

essendo  $i_p > 0$ . In questo caso variando il tempo di investimento da  $t_0$  a  $t_0 + \Delta t$  il montante subirà una variazione pari a

$$\Delta M_{t_0, \Delta t} = C(1 + i_p)^{t_0}((1 + i_p)^{\Delta t} - 1).$$

Il tasso di variazione è allora dato da

$$\frac{\Delta M_{t_0, \Delta t}}{\Delta t} = C(1 + i_p)^{t_0} \left( \frac{(1 + i_p)^{\Delta t} - 1}{\Delta t} \right).$$

Esso risulta incrementarsi nel tempo e misura la rapidità con cui l'attività economica incrementa il capitale inizialmente investito. Inoltre assumendo un capitale iniziale unitario,  $C = 1$ , all'istante iniziale  $t_0 = 0$ , otterremo

$$\frac{\Delta M_{0, \Delta t}}{\Delta t} = \left( \frac{(1 + i_p)^{\Delta t} - 1}{\Delta t} \right)$$

e passando al limite per  $\Delta t \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta M_{0, \Delta t}}{\Delta t} = \log(1 + i_p).$$

Dunque  $\log(1 + i_p)$  rappresenta la rapidità di incremento istantanea all'istante  $t = 0$  del capitale unitario.

**Definizione (Funzione Derivabile in un Punto)** Diciamo che  $f$  è derivabile in  $x_0$  se esiste finito il

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

In tal caso chiamiamo il suddetto limite derivata (prima) della funzione  $f$  in  $x_0$  e lo denotiamo con uno dei seguenti simboli

$$f'(x_0), \quad (Df(x))_{x=x_0}, \quad \left( \frac{d}{dx} f(x) \right)_{x=x_0}, \quad \left( \frac{df}{dx} \right)_{x_0}$$

Siano  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni reali di variabile reale e sia  $x_0 \in \overset{\circ}{D}_f \cap \overset{\circ}{D}_g$ .

**Teorema** Se  $f$  e  $g$  sono derivabili in  $x_0$ , allora anche la funzione somma  $f + g : D_{f+g} \rightarrow \mathbb{R}$  e la funzione prodotto  $f \cdot g : D_{f \cdot g} \rightarrow \mathbb{R}$  (cfr 1.2.1 e 1.2.1) sono derivabili in  $x_0$ . Inoltre risulta

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

e

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

**Teorema** Se  $f$  e  $g$  sono derivabili in  $x_0$  e  $g(x_0) \neq 0$ , allora anche la funzione rapporto  $f \div g : D_{f \div g} \rightarrow \mathbb{R}$  (cfr 1.2.1) è derivabile in  $x_0$ . Inoltre risulta

$$(f \div g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

è continua in  $x_0$ .

Siano  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni reali di variabile reale e sia  $x_0 \in \dot{D}_f$  tale che  $f(x_0) \in \dot{D}_g$ .

**Teorema** Se  $f$  è derivabile in  $x_0$  e  $g$  è derivabile in  $y_0 \equiv f(x_0)$ , allora anche la funzione composta  $g \circ f : D_{g \circ f} \rightarrow \mathbb{R}$  (cfr 1.2.1) è derivabile in  $x_0$ . Inoltre risulta

$$(g \circ f)'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Sia  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale e sia  $x_0 \in \dot{D}_f$ .

**Teorema** Se  $f$  è invertibile e derivabile in  $x_0$ , allora la funzione inversa  $f^{-1} : D_{f^{-1}} \rightarrow \mathbb{R}$  (cfr 1.2.1) è derivabile in  $y_0 \equiv f(x_0)$ . Inoltre risulta

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Sia  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale.

**Definizione (Massimi e Minimi Locali)** Diciamo che un punto sia  $x_0 \in D_f$  è un punto di *massimo* [risp. *minimo*] locale per  $f$  se esiste  $\delta_{x_0} > 0$  tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad [\text{risp. } f(x) \geq f(x_0)] \quad \forall x \in (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0}) \cap D_f.$$

**Teorema (Fermat)** Sia  $x_0 \in \dot{D}_f$  e sia  $f$  derivabile in  $x_0$  se  $x_0$  è un punto di massimo o di minimo locale per  $f$ , risulta

$$f'(x_0) = 0.$$

**Dimostrazione** Per fissare le idee, supponiamo che  $x_0$  sia un punto di minimo locale per  $f$ . Allora esiste un intorno  $\delta_{x_0} > 0$  tale che

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta_{x_0}, x_0 + \delta_{x_0}) \cap D_f.$$

Risulta allora per ogni  $x \in (x_0 - \delta_{x_0}, x_0) \cap D_f$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0,$$

e per ogni  $x \in (x_0, x_0 + \delta_{x_0}) \cap D_f$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Pertanto avremo

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

se i suddetti limiti esistono. D'altra parte, l'ipotesi di derivabilità di  $f$  in  $x_0$  garantisce l'esistenza di tali limiti e l'uguaglianza di entrambi a  $f'(x_0)$ . Dovrà pertanto aversi sia  $f'(x_0) \leq 0$  che  $f'(x_0) \geq 0$  e non rimane che concludere per la tesi del Teorema.

Da notare che la condizione del Teorema di Fermat è necessaria ma non sufficiente.

**Esempio** Consideriamo la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^3.$$

E' immediato riconoscere che  $f'(0) = 0$ , ma che il punto 0 non è né un punto di massimo né di minimo locale per  $f$ .

Sia  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale di variabile reale, essendo  $D_f$  un intervallo di  $\mathbb{R}$ .

**Teorema** Se  $f$  è derivabile in  $\overset{\circ}{D}_f$  e se  $f'(x) > 0$  [risp.  $f'(x) < 0$ ] per ogni  $x \in \overset{\circ}{D}_f$  allora  $f$  è crescente [risp. decrescente] in  $D_f$ .

Sia  $[a, b]$  un intervallo chiuso e limitato di  $\mathbb{R}$  e sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua in  $[a, b]$  e derivabile in  $(a, b)$ .

**Teorema (Esistenza del Valor Medio (Lagrange))** Esiste almeno un punto  $c \in (a, b)$  tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Dimostrazione** Introduciamo la funzione  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo

$$g(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad \forall x \in [a, b]. \quad (1.2)$$

Notiamo che  $g$  è continua in  $[a, b]$ , derivabile in  $(a, b)$  e risulta

$$g(a) = g(b) = 0. \quad (1.3)$$

Per il teorema di Weierstrass, esistono due punti  $\underline{c}, \bar{c} \in [a, b]$  dove la funzione  $g$  prende il suo valore minimo,  $g(\underline{c}) = m$ , ed il suo valore massimo,  $g(\bar{c}) = M$ . Se i punti  $\underline{c}$  e  $\bar{c}$  sono gli estremi dell'intervallo  $[a, b]$ , allora dalla (1.3) si deduce immediatamente che la funzione  $g$  è costantemente nulla in  $[a, b]$  e pertanto

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

per ogni  $x \in [a, b]$  e

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

per ogni  $x \in (a, b)$ . Se invece almeno uno dei due punti  $\underline{c}$  o  $\bar{c}$  è interno all'intervallo  $[a, b]$ , ad esempio  $\underline{c}$ , allora deve aversi

$$g'(\underline{c}) = 0$$

e dalla (1.2) otteniamo

$$f'(\underline{c}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ciò completa la dimostrazione.

**Teorema (Rolle)** Se  $f(a) = f(b)$ , allora esiste almeno un punto  $c \in (a, b)$  tale che

$$f'(c) = 0.$$

**Notazione** Denotiamo con  $\bar{\mathbb{R}}$  l'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$  con l'aggiunta dei simboli  $-\infty$  e  $+\infty$ . Ossia  $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

Sia  $(a, b)$  un intervallo di  $\mathbb{R}$ , siano  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni derivabili in  $(a, b)$  e sia  $x_0 \in (a, b)$ .

**Teorema (I Teorema di de L'Hôpital)** Supponiamo che:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ;
2.  $g(x)$  e  $g'(x)$  non nulle in  $(a, b) - \{x_0\}$ ;

3. esiste il  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$ .

Allora esiste anche il  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  e risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

**Teorema (II Teorema di de L'Hôpital)** Supponiamo che:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ ;
2. esiste il  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$ .

Allora esiste anche il  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$  e risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Sia  $(a, +\infty)$  una semiretta destra di  $\mathbb{R}$ , siano  $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni derivabili in  $(a, +\infty)$ .

**Teorema (III Teorema di de L'Hôpital)** Supponiamo che:

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ;
2. esiste il  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \bar{\mathbb{R}}$ .

Allora esiste anche il  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  e risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

## 1.6 Derivate di Ordine Superiore al Primo

Sia  $(a, b)$  un intervallo di  $\mathbb{R}$ , sia  $x_0 \in (a, b)$  e sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione che, per un certo  $n \in \mathbb{N}$ , sia derivabile fino all'ordine  $n - 1$  in  $(a, b)$  e tale che esista anche  $f^{(n)}(x_0)$ .

**Definition 2 (Polinomio di Taylor di Ordine  $n$ )** Chiamiamo polinomio di Taylor di ordine  $n$  relativo alla funzione  $f$  di punto iniziale  $x_0$  il polinomio  $T_{f, x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definito ponendo

$$T_{f, x_0}^n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Example 3** Come è noto la funzione esponenziale  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ha derivata di ogni ordine  $n \in \mathbb{N}$  sull'asse reale e risulta

$$f^{(n)}(x) = \exp(x)$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Comunque fissato il punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  possiamo allora considerare il polinomio di Taylor di ordine  $n$  relativo alla funzione  $\exp$  di punto iniziale  $x_0$ . Risulta quindi

$$T_{\exp, x_0}^n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\exp(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

In particolare, scegliendo  $x_0 = 0$ , otteniamo

$$T_{\exp, 0}^n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k.$$

**Definition 4** Il polinomio di Taylor relativo alla funzione esponenziale di punto iniziale  $x_0 = 0$  è anche noto come polinomio di Mc Laurin.

**Example 5** La funzione logaritmo

**Definition 6 (Resto Associato al Polinomio di Taylor)** Chiamiamo resto associato al polinomio di Taylor di ordine  $n$  relativo alla funzione  $f$  di punto iniziale  $x_0$  la funzione  $R_{f, x_0}^n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  definita ponendo

$$R_{f, x_0}^n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - T_{f, x_0}^n(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sia  $R_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  il resto associato a  $T_{f, x_0}^n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Theorem 7 (Valutazione di Peano del Resto)** Supponiamo che la funzione  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  sia derivabile fino all'ordine  $n$  in  $(a, b)$ . Risulta allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{f, x_0}^n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Si dice anche che  $R_{f, x_0}^n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  è in  $x_0$  un infinitesimo di ordine superiore ad  $(x - x_0)^n$  e si scrive  $R_{f, x_0}^n(x) = o((x - x_0)^n)$ .

**Theorem 8 (Valutazione di Lagrange del Resto)** Supponiamo che la funzione  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  sia derivabile fino all'ordine  $n$  in  $(a, b)$  e fino all'ordine  $n + 1$  in  $(a, b) - \{x_0\}$ . Allora, per ogni  $x \in (a, b)$  esiste un opportuno  $\xi$  strettamente compreso tra  $x_0$  ed  $x$  tale che

$$R_{f, x_0}^n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}. \quad (1.4)$$

**Example 9** Con riferimento all'Esempio (3), consideriamo il problema di dare una valutazione del numero reale trascendente  $\exp(1) \equiv e$ . Calcolando nel punto  $x = 1$  il polinomio di Mc Laurin di ordine  $n$  relativo alla funzione esponenziale, abbiamo

$$T_{\exp,0}^n(1/2) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Più esplicitamente,

$$\begin{aligned} T_{\exp,0}^n(1/2) &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots \end{aligned}$$

Come si vede il calcolo di  $T_{\exp,0}^n(1)$  si basa esclusivamente su operazioni elementari di somma e prodotto di numeri razionali. Pertanto il calcolo di  $T_{\exp,0}^n(1)$  non presenta alcun problema per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Si pone nondimeno il problema di sapere entro quale limite il numero razionale  $T_{\exp,0}^n(1)$  costituisce un'approssimazione del numero reale trascendente  $e$ . Allo scopo, applicando la valutazione di Lagrange (1.4), consideriamo il resto

$$R_{\exp,0}^n(1) = \exp(1) - T_{\exp,0}^n(1) = \frac{\exp(\xi)}{(n+1)!}.$$

Pur non conoscendo quale punto sia esattamente  $\xi \in (0, 1)$  sappiamo che, per la crescita della funzione esponenziale, risulta certamente

$$\exp(\xi) < \exp(1) = e < 3.$$

Pertanto avremo

$$R_{\exp,0}^n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

e ciò fornisce una valutazione in termini razionali dell'errore che commettiamo sostituendo ad  $e$  il valore  $T_{\exp,0}^n(1)$  in dipendenza dalla scelta di  $n$ . Così scegliendo  $n = 5$ , avremo che

$$T_{\exp,0}^5(1/2) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120}$$

approssima il numero  $e$  con un errore

$$R_{\exp,0}^5(1) < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240}.$$

Mentre se vogliamo una approssimazione di  $e$  con un errore minore di  $10^{-4}$  dovremo scegliere il valore  $T_{\exp,0}^n(1)$  in corrispondenza ad un  $n \in \mathbb{N}$  soluzione della disequazione

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-4}.$$

*Ossia*

$$(n+1)! > 3 \cdot 10^4.$$

*Si vede che il minimo  $n \in \mathbb{N}$  soluzione di quest'ultima disequazione è  $n = 7$ .*

*Infatti*

$$8! = 40320 > 3 \cdot 10^4.$$

*Pertanto*

$$T_{\exp,0}^7(1/2) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} = 2.71825$$

*costituisce un'approssimazione di  $e$  con un errore minore di  $10^{-4}$ .*

**Exercise 10** *Con riferimento all'Esempio (9), dare una valutazione del numero reale trascendente  $\exp(1/2) \equiv \sqrt{e}$ . con un'approssimazione caratterizzata da un errore minore di  $10^{-4}$ .*