Corso di Matematica Generale
Esercitazione 4
Limiti di successioni numeriche - Serie geometrica

Dr. Stefano Guarino
guarino@mat.uniroma3.it

16 Ottobre, 2014

1 Limiti di successioni numeriche

1. Calcolare, se possibile, il limite delle seguenti successioni:

   (a) $a_n = \frac{n^2-5}{n-173}$

   (b) $a_n = \frac{n^2+3n-57}{3n^3-4n^2+3}$

   (c) $a_n = \frac{(n+3)(n-2)}{2n^2-4n-3}$

   (d) $a_n = \sqrt{2n^2+5n-3} - \sqrt{n^2+n}$

   (e) $a_n = \frac{n^3+8}{(2-n)^3}$

   (f) $a_n = (-1)^n \frac{n+2}{2n}$

   (g) $a_n = (-1)^n \frac{3}{5-n}$

   (h) $a_n = \sin(n+5)$

   (i) $a_n = \log(2n^2+5) - \log(n^2+3n+5)$

   (j) $a_n = \exp\left(\frac{-3}{n+2}\right)$

   (k) $a_n = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n}$

   (l) $a_n = \exp(n^2) \cdot \exp\left(\frac{-n^3+n^2+n+5}{n-1}\right)$

   (j) $a_n = \cos\left(\frac{2n}{(3+n)(n-1)}\right)$

   (k) $a_n = \sqrt{3}^{(}n+2)$

   (l) $a_n = \frac{2^n+4^n}{3^n-5^n}$

   (m) $a_n = \frac{(-1)^n n}{n^2-1}$

   (n) $a_n = \sqrt{3^n+4^n}$

   (o) $a_n = \frac{\log(n+1)}{\log n}$

   (p) $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$

   (q) $a_n = \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^n$

   (r) $a_n = \left(\frac{4^n-2}{2^n}\right)\left(\frac{1+3n-2n^2}{3n+5}\right)$

   (s) $a_n = (-1)^n \cos n\pi$

   (t) $a_n = \frac{\sqrt{n}+\log n}{3-\log n}$

   (u) $a_n = \frac{\sin(n)}{n}$

2. Rispondere ai seguenti quesiti:

   (a) Se a_n è infinitesima, cosa si può dire di $b_n = a_n^{-1}$?

   (b) Se a_n tende a $-\infty$, cosa si può dire di $b_n = \frac{-2}{a_n}$?

   (c) Se il limite di a_n è 5, cosa si può dire di $b_n = \frac{1}{a_n-5}$?

   (d) É vero che, se a_n diverge, allora $b_n = na_n^{-1}$ converge?

   (e) Se a_n è infinitesima, cosa si può dire di $b_n = |a_n|^{-1}$?

   (f) Se a_n è infinitesima, cosa si può dire di $b_n = (-1)^n a_n$?

(g) Se a_n diverge, cosa si può dire di $b_n = (-1)^n a_n$?

(h) Se il limite di a_n è 5, il limite di b_n è 7, e $a_n < c_n < b_n$ per ogni n, cosa si può dire di c_n?

(i) Se il limite di a_n è 0, e il limite di b_n è $+\infty$, cosa si può dire di $c_n = a_n \cdot b_n$?

(j) Sapere che il limite di a_n è 0 è sufficiente per affermare che $b_n = \sqrt{a_n}$ tende a 0?

(k) Se il limite di a_n è $+\infty$ e il limite di b_n è $l > 0$, cosa si può dire di $c_n = a_n^{b_n}$?

(l) Se $\forall \epsilon > 0 \; \exists N > 0$ tale che $\forall n > N \; |a_n| < \epsilon$, cosa si può dire di a_n?

(m) Se $\forall L > 0 \; \exists N > 0$ tale che $\exists n_0 > N \; a_{n_0} > L$, cosa si può dire di a_n?

(n) Se $\forall \epsilon > 0 \; \exists N > 0$ tale che $\forall n > N \; l - a_n < \epsilon$, cosa si può dire di a_n?

2 Serie geometrica

3. Studiare il carattere (e, ove possibile, calcolare la somma) delle seguenti serie:

   (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n+7^n}{11^n}$

   (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{4}\right)^n$

   (c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{19}-1}{3}\right)^n$

   (d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n-5^n}{3^n}$

   (e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n-2^n}{5^{n+1}-5^n}$

   (f) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{n}{3}}$

   (g) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right)^n$

4. Studiare il carattere (e, ove possibile, calcolare la somma) delle seguenti serie, al variare di $x \in \mathbb{R}$:

   (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} (\ln x)^n$

   (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} (\log_{\frac{1}{2}} x)^n$

   (c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2-x}\right)^n$

   (d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(x^2+x+1)^n}$

   (e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

   (f) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{x^2+x-3}{(x-2)(x+3)}\right)^n$

   (g) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{2x} - e^x + 1\right)^n$