Corso di Matematica Generale
Esercitazione 4 - Soluzioni

Dr. Stefano Guarino
guarino@mat.uniroma3.it

16 Ottobre, 2014

1 Limiti di successioni numeriche

1. (a) $a_n = \frac{n^2-5}{n-173} \quad \to +\infty$
   (b) $a_n = \frac{n^2+3n-57}{3n^3-4n^2+3} \quad \to 0$
   (c) $a_n = \frac{(n+3)(n-2)}{2n^2-4n-3} \quad \to \frac{1}{2}$
   (d) $a_n = \sqrt{2n^2+5n-3} - \sqrt{n^2+n} \quad \to +\infty$
   (e) $a_n = \frac{n^3+8}{(2-n)^3} \quad \to -1$
   (f) $a_n = (-1)^n \frac{n+2}{2n} \quad \nexists$ il limite
   (g) $a_n = (-1)^n \frac{3}{5-n} \quad \to 0$
   (h) $a_n = \sin(n+5) \quad \nexists$ il limite
   (i) $a_n = \log(2n^2+5) - \log(n^2+3n+5) \quad \to \log(2)$
   (j) $a_n = \exp\left(\frac{-3}{n+2}\right) \quad \to 1$
   (k) $a_n = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n} \quad \to e^{\frac{2}{3}}$
   (l) $a_n = \exp(n^2) \cdot \exp\left(\frac{-n^3+n^2+n+5}{n-1}\right) \quad \to e$
   (j) $a_n = \cos\left(\frac{2n}{(3+n)(n-1)}\right) \quad \to 1$
   (k) $a_n = \sqrt{3}^{n+2} \quad \to +\infty$
   (l) $a_n = \frac{2^n+4^n}{3^n-5^n} \quad \to 0$
   (m) $a_n = \frac{(-1)^n n}{n^2-1} \quad \to 0$
   (n) $a_n = \sqrt{3^n+4^n} \quad \to +\infty$
   (o) $a_n = \frac{\log(n+1)}{\log n} \quad \to 1$
   (p) $a_n = \sin\frac{n\pi}{2} \quad \nexists$ il limite
   (q) $a_n = \left(\frac{n+1}{n-2}\right)^n \quad \to e^3$
   (r) $a_n = \left(\frac{4^n-2}{2^n}\right)\left(\frac{1+3n-2n^2}{3n+5}\right) \quad \to -\infty$
   (s) $a_n = (-1)^n \cos n\pi \quad \to 1$
   (t) $a_n = \frac{\sqrt{n}+\log n}{3-\log n} \quad \to -\infty$
   (u) $a_n = \frac{\sin(n)}{n} \quad \to 0$

2. (a) Se a_n è infinitesima, $b_n = a_n^{-1}$ diverge.
   (b) Se a_n tende a $-\infty$, $b_n = \frac{-2}{a_n}$ tende a 0.
   (c) Se il limite di a_n è 5, $b_n = \frac{1}{a_n-5}$ tende a 0.
   (d) No. Sapere che a_n diverge non è sufficiente per dedurre il limite di $b_n = na_n^{-1}$.
   (e) Se a_n è infinitesima, $b_n = |a_n|^{-1}$ diverge.
   (f) Se a_n è infinitesima, $b_n = (-1)^n a_n$ tende a 0.
   (g) Se a_n diverge, il limite di $b_n = (-1)^n a_n$ non esiste.
   (h) Se il limite di a_n è 5, il limite di b_n è 7, e $a_n < c_n < b_n$ per ogni n, c_n converge a un valore compreso tra 5 e 7.
   (i) Nulla. Sapere che il limite di a_n è 0, e il limite di b_n è $+\infty$, non permette di dedurre il limite di $c_n = a_n \cdot b_n$.

(j) Si. Si può dimostrare che se il limite di a_n è 0 allora anche $b_n = \sqrt{a_n}$ tende a 0.

(k) Se il limite di a_n è $+\infty$ e il limite di b_n è $l > 0$, $c_n = a_n^{b_n}$ diverge.

(l) Se $\forall \epsilon > 0\ \exists N > 0$ tale che $\forall n > N\ |a_n| < \epsilon$, allora a_n tende a 0.

(m) Se $\forall L > 0\ \exists N > 0$ tale che $\exists n_0 > N\ a_{n_0} > L$, allora a_n è non limitata, ma non è detto che diverga: potrebbe non ammettere limite (vedi (g)).

(n) Se $\forall \epsilon > 0\ \exists N > 0$ tale che $\forall n > N\ l - a_n < \epsilon$, l'unica cosa che possiamo dire su a_n è che, se ammette limite, tale limite è maggiore o uguale ad l (attenzione al modulo!).

2 Serie geometrica

3. (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n+7^n}{11^n} = \frac{33}{8}$.

   (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4}{5}$.

   (c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{19}-1}{3}\right)^n = +\infty$.

   (d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n-5^n}{3^n} = -\infty$.

   (e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n-2^n}{5^{n+1}-5^n} = \frac{5}{24}$.

   (f) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{n}{3}} = \frac{5}{7}$.

   (g) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2}\right)^n$ converge.

4. (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} (\ln x)^n$, converge a $\frac{1}{1-\ln x}$, se e solo se $e^{-1} < x < e$.

   (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} (\log_{\frac{1}{2}} x)^n$, converge a $\frac{1}{1-\log_{\frac{1}{2}} x}$, se e solo se $\frac{1}{2} < x < 2$.

   (c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2-x}\right)^n$, converge a $\frac{2-x}{1-x}$, se e solo se $x < 1 \vee x > 3$.

   (d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(x^2+x+1)^n}$, converge a $\frac{x^2+x+1}{3x}$, se e solo se $x > 0$.

   (e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$, converge a $\frac{2}{2-\sqrt{3}-2\sin x}$, se e solo se $2k\pi \leq x < 2k\pi + \arcsin \frac{2-\sqrt{3}}{2} \vee (2k+1)\pi - \arcsin \frac{2-\sqrt{3}}{2} < x < 2(k+1)\pi$.

   (f) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{x^2+x-3}{(x-2)(x+3)}\right)^n$, converge a $-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 2$, se e solo se $x < \frac{-1-\sqrt{19}}{2} \vee x > \frac{-1+\sqrt{19}}{2}$.

   (g) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{2x} - e^x + 1\right)^n$, converge a $\frac{1}{e^x-e^{2x}}$, se e solo se $x < 0$.