Corso di Matematica Generale
Esercitazione 11
Funzioni di due variabili reali

Dr. Stefano Guarino
guarino@mat.uniroma3.it

10 Dicembre, 2014

1. Per ognuna delle seguenti funzioni, stabilire e rappresentare graficamente il dominio e le curve di livello. Calcolarne il gradiente ed individuare eventuali punti stazionari.

   (a) $f(x,y) = x^2y + x^2 - 2y$

   (b) $f(x,y) = \log(1 + x^2y^2)$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

   (d) $f(x,y) = x\cos y$

   (e) $f(x,y) = e^{x-y^2}$

   (f) $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$

   (g) $f(x,y) = \log(1 - x^2 - y^2)$

   (h) $f(x,y) = ye^{2y}$

   (i) $f(x,y) = ye^{2x}$

   (j) $f(x,y) = 2x^2 + y^3 - 5x$

   (k) $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2 - y^2)}$

   (l) $f(x,y) = \frac{2x}{x+y^2}$

2. Per ognuna delle seguenti funzioni, individuare i punti di massimo e minimo soggetti al vincolo V indicato.

   (a) $f(x,y) = xy$
   $V = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$

   (b) $f(x,y) = x^2 + 3y$
   $V = \{(x,y) \in \mathbb{R} : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$

   (c) $f(x,y) = x^2y$
   $V = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^4 + y^4 = 1\}$

   (d) $f(x,y) = |x| + |y|$
   $V = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$

   (e) $f(x,y) = \sqrt{2x^2 - xy + y^2}$
   $V = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x + y = 8\}$

   (f) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
   $V = \{(x,y) \in \mathbb{R} : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1\}$

   (g) $f(x,y) = -x\log x - y\log y$
   $V = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x + y = 1\}$

   (h) $f(x,y) = x + y$
   $V = \{(x,y) \in \mathbb{R} : y + x - 1 < 0, x > 0, y > 0\}$

   (i) $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y$
   $V = \{(x,y) \in \mathbb{R} : y + x - 1 < 0, x > 0, y > 0\}$

   (j) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$
   $V = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$

   (k) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 6x + 4xy$
   $V = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 - y + 1 < 0, y \leq 10\}$

   (l) $f(x,y) = |x| + |y|$
   $V = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq 1\}$

   (m) $f(x,y) = (x-y)e^{-(x+y)^2}$
   $V = \{(x,y) \in \mathbb{R} : 2x - y \leq 0\}$

   (n) $f(x,y) = x^2 + 2x\log y$
   $V = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 - y^2 > 0, x^2 + y - 2 \leq 0\}$

3. Si consideri un consumatore le cui preferenze tra due beni x e y sono rappresentate dalla funzione di utilità $u(x, y)$. In poche parole, $u(x, y)$ rappresenta il livello di soddisfazione del consumatore se acquista x unità del primo bene e y unità del secondo. I prezzi unitari dei due beni sono p_x e p_y e il consumatore dispone di un reddito R. In ognuno dei seguenti scenari, si determini la scelta ottimale del consumatore, ovvero quante unità dei due beni acquistare per massimizzare la sua funzione di utilità senza superare il reddito a disposizione.

   (a) $u(x, y) = xy$, $p_x = 3$, $p_y = 5$, $R = 1200$

   (b) $u(x, y) = x^2 y$, $p_x = 30$, $p_y = 60$, $R = 3600$

   (c) $u(x, y) = \sqrt[4]{x}\,\sqrt[4]{y^3}$, $p_x = 2$, $p_y = 4$, $R = 800$

   (d) $u(x, y) = xy + xy^2$, $p_x = 4$, $p_y = 3$, $R = 10$

   (e) $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, $p_x = 10$, $p_y = 5$, $R = 120$