

ESERCITAZIONE

MATEMATICA GENERALE

CLEMIF

Dott. Stefano Marini & Dott. Gianluca Marzo

21/09/2016, A.A. 2017/2018

Teoria degli Insiemi per i Numeri Reali \mathbb{R}

1) Si rappresentino sotto forma di **Intervallo** i seguenti insiemi:

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 0\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{4}\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -9\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\sqrt{11}\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \sqrt{2}\}$

2) Si rappresentino sulla **Retta Orientata** \mathbb{R} e sotto forma di **Intervallo** i seguenti insiemi numerici:

- $\mathbf{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$
- $\mathbf{B} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$
- $\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$
- $\mathbf{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{5}{7}, x \geq \sqrt{3}\}$

3) Calcolare il risultato delle seguenti operazioni sugli insiemi **A**, **B**, **C**, **D** e rappresentarli sotto forma di **Intervallo**:

- $\mathbf{A}^c, \mathbf{B}^c, \mathbf{C}^c, \mathbf{D}^c$;
- $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}, \mathbf{A} \cap \mathbf{B}, (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})^c \setminus \mathbf{C}$
- $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}^c \cup \mathbf{C}$
- $\mathbf{A} \cap \mathbf{D}, \mathbf{A} \cap \mathbf{D}^c$
- $\mathbf{C} \cap \mathbf{D}^c, (\mathbf{C} \cap \mathbf{D})^c$
- $(\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \cap \mathbf{D}$ e $\mathbf{B} \cup (\mathbf{C} \cap \mathbf{D})$
- $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \setminus \mathbf{D}$

4) Siano $\mathbf{M} = [-1, 0]$, $\mathbf{N} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e $\mathbf{P} = \left(\frac{1}{8}, +\infty\right)$, si calcolino le seguenti espressioni:

- $\mathbf{M}^c, \mathbf{N}^c, \mathbf{P}^c$
- $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} \cap \mathbf{P}, \mathbf{M} \cup \mathbf{N} \cup \mathbf{P}$
- $\mathbf{N} \cap \mathbf{M}, \mathbf{M}^c \cap \mathbf{N}^c, \mathbf{M} \cap \mathbf{P}^c$
- $(\mathbf{M} \cup \mathbf{N}) \cap \mathbf{P}, (\mathbf{M} \cup \mathbf{N})^c \cap \mathbf{P}, (\mathbf{M} \cup \mathbf{N}) \cap \mathbf{P}^c$
- $\mathbf{N} \cup \mathbf{P}, \mathbf{N} \cap \mathbf{P}^c$

Topologia della Retta Reale \mathbb{R}

5) Per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R} si dica se sono **Aperti**, **Chiusi** o né **Aperti** né **Chiusi**, e si calcoli la loro **Frontiera**:

- $(-\infty, +\infty)$
- \emptyset
- $(-\infty, -5]$
- $\{1\}$
- $\{\pi\}^c$
- $\{3\} \cup [0, 1]$
- $[-10, 10]$
- $(6, 7)$
- $[1, 2) \cup [2, 3]$
- $(1, 2) \cup [-1, 0]$
- $(-\infty, 0]^c$

6) Per ciascuno dei seguenti insiemi se ne trovi l'**Interno**, la **Frontiera**, i **Punti di Accumulazione** e si dica se sono insiemi **Aperti**, **Chiusi** o nessuno dei due:

- $\{1\}$
- $[0, 3] \cup (3, 5)$
- $[0, 2] \cap [2, 4]$
- $[-5, \sqrt{2}] \cap [0, \frac{1}{10}]$
- $[0, 10] \setminus \mathbb{N}$
- $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$
- $(-\infty, -1) \cup \{0\} \cup [\frac{1}{10}, 1]$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

Ricerca di Estremi di un Insieme

7) Dire se i seguenti insiemi sono limitati **inferiormente** o **superiormente** e, in caso affermativo, trovare l'**estremo inferiore** o l'**estremo superiore**.

Dire se si tratta di **minimi** o **massimi**.

- $[-1, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$
- $(-1, 0) \subseteq \mathbb{R}$
- $[-\sqrt{5}, 3] \subseteq \mathbb{R}$
- $[-\sqrt{7}, \frac{3}{2}] \cap \mathbb{Q}$
- $[-2, 1] \cap \mathbb{N}$
- $\mathbf{A} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbf{A}' = \mathbf{A} \cup [0, 1]$
- $\mathbf{A}'' = \{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbf{B} = \{\frac{2n}{n^2+1} : n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbf{C} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$
- $\mathbf{C}' = \mathbf{C} \cap \mathbb{Q}$
- $\mathbf{D} = \{n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbf{E} = \{n^2 + 3n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$
- $\mathbf{F} = \{2^x : x \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbf{F}' = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}$

Funzioni tra Insiemi Numerici: Iniettività e Suriettività

8) Nei seguenti esercizi stabilire quali delle seguenti funzioni sia o meno **Iniettiva**, **Suriettiva** o entrambe (e quindi **Biiettiva**/**Biunivoca**):

- Sia f la funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $f(n) = n^2$.
- Sia f la funzione $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tale che $f(x) = x^2$.
- Sia $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tale che $f(x) = -3x + 1$.
- Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ tale che $f(n) = \frac{1}{n}$.
- Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ tale che $f(n) = \frac{n-1}{n+1}$.
- Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x^3$.
- Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = x^2 - \pi$.
- Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(n) = \sqrt{n}$.

9) Si consideri l'insieme dei numeri naturali pari $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$ e quello dei numeri naturali dispari $\mathbb{D} \subset \mathbb{N}$. Si stabiliscano le proprietà delle seguenti funzioni come per l'esercizio 8.

- Sia $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{D}$ la funzione che associa a ciascun numero naturale pari p il numero dispari successivo.
(a) Si scriva la legge di f (cioè $f(p) = \dots$).
(b) Si dica se f così definita è Iniettiva o Suriettiva.

- Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione così definita:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \in \mathbb{P} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{se } n \in \mathbb{D} \end{cases}$$

- Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione così definita:

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{se } n \in \mathbb{P} \\ n-1 & \text{se } n \in \mathbb{D} \end{cases}$$

- Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione così definita:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$