Università degli Studi di Roma “Tor Vergata”

ESERCITAZIONE DI MATEMATICA GENERALE - CLEF
7/11/2024 A.A. 2024/2025

- Verificare con la definizione che

$\lim_{x\to 3}(4x-5)=7;$
$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty;$
$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty;$
$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0;$
$\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0;$
$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}=+\infty.$

- Calcolare i seguenti limiti

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-1}{x^2+1};$
$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x}{x^4+7x-1};$
$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1};$
$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1};$
$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}};$
$\lim_{x\to 1}e^{\frac{1}{x-1}};$
$\lim_{x\to 0}\frac{\log(2+x)-\log 2}{3x};$
$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}(\sqrt{1+x}-\sqrt{x});$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x};$
$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x})^{\frac{1}{\sin x}};$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{\tan^2 x};$
$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x};$
$\lim_{x\to 1}\frac{4x-x^2}{1-x^2};$
$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-x^2+x-1};$
$\lim_{x\to -1^+}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}};$
$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}};$
$\lim_{x\to 0}\frac{4\log x-5}{3\log x+2};$
$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2}-x;$
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x/7)}{\log_2(1+x)};$
$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{3x};$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^2)}{x^2\sin^2(x)};$

- Per ciascuna funzione, calcolare, quando possibile, asintoti verticali e orizzontali

$$y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 4}$$
$$y = f(x) = \log_4\left(\frac{3x}{x-1}\right)$$
$$y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}-1}{x}$$
$$y = f(x) = xe^{\frac{x-1}{x+1}}$$
$$y = f(x) = \sqrt{\frac{x^3-1}{x^2+x-2}}$$
$$y = f(x) = 3x + \sqrt{x^2-1}$$
$$y = f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$
$$y = f(x) = x\frac{2\log(x) - 3}{\log x - 2}$$
$$y = f(x) = 3x + \log\left(\frac{5x}{x-2}\right)$$
$$y = f(x) = \ln(\sqrt{2+x^2} + x)$$
$$y = f(x) = xe^{-\frac{1}{|x|}}$$
$$y = f(x) = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$
$$y = f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{1+\cos x}}$$

- Determinare se la seguente funzione è continua su $\mathbb{R}$

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} - 1 & \text{se } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{\ln(1+x)}{x^2+1} & \text{se } x \in [0,1] \\ x^2 - 1 & \text{se } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

- Determinare dove sono continue le seguenti funzioni. Classificare, nel caso ve ne siano, i punti di discontinuità

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos^3 x}{x(e^x-1)} & \text{se } x < 0 \\ \log(\sqrt{x}+1) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$
$$y = f(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{2+x}\right)^{\frac{1}{x}} & \text{se } -2 < x < 0 \\ \frac{1}{x+e} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$
$$y = f(x) = \frac{x+3}{3x^2+x^3}$$
$$y = f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{3-x}}$$
$$y = f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$y = f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{\sqrt{-1+x^2}}} & \text{se } x < -1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \\ \frac{e^{\cos(x+1)-1} - e^{x+1}}{x+1} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

- Determinare $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x & \text{se } x \geq 1 \\ -x + k & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

sia continua in $\mathbb{R}$.

- Determinare $a, b \in \mathbb{R}$ tale che

$$y = f(x) = \begin{cases} \log(1+x) & \text{se } -1 < x \geq 0 \\ a \sin x + b \cos x & \text{se } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ x & \text{se } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

sia continua in $\mathbb{R}$.

- Verificare che la funzione

$$y = f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

è prolungabile per continuità.