

Esercitazione 2: costruire una curva di domanda

Mattia Albanese
albanesemattia1@gmail.com

A.A. 2025/2026

Indice

1	Curve di Utilità e SMS	3
1.1	Soluzione	3
2	Beni Perfetti Sostituti	5
2.1	Soluzione	5
3	Beni Perfetti Complementi	7
3.1	Soluzione	7

1 Curve di Utilità e SMS

Data la seguente funzione di utilità

$$U(x_1, x_2) = Ax_1^\alpha x_2^\beta$$

Calcolare:

1. Le domande ottime per i due beni.
2. Le elasticità delle domande ottime al prezzo, dirette ed incrociate.
3. Le elasticità delle domande ottime al reddito, ed indicare se i beni sono normali o Giffen.

1.1 Soluzione

Calcoliamo le domande ottime risolvendo il tipico sistema di equationi:

$$\begin{cases} SMS = \frac{p_1}{p_2} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases}$$
$$SMS = \frac{A\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^\beta}{A\beta x_1^\alpha x_2^{\beta-1}} = \frac{\alpha x_2}{\beta x_1}$$

Dunque il sistema diventa

$$\begin{cases} \frac{\alpha x_2}{\beta x_1} = \frac{p_1}{p_2} \implies x_2 = x_1 \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \\ R = p_1 x_1 + p_2 x_2 \end{cases}$$
$$R = p_1 x_1 + p_2 x_1 \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} = p_1 x_1 + p_1 x_1 \frac{\beta}{\alpha} = p_1 x_1 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

Otteniamo così la domanda ottima dei due beni:

$$x_1^d = \frac{R}{p_1 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{R}{p_1} \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$
$$x_2^d = \frac{\beta p_1}{\alpha p_2} \frac{R}{p_1 \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{R}{p_2} \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

Elasticità al prezzo dirette

L'elasticità della domanda ottima di x_1 rispetto al proprio prezzo p_1 è:

$$\varepsilon_{x_1^d, p_1} = \frac{\partial x_1^d}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{x_1^d} = -\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{R}{p_1^2} \cdot \frac{p_1}{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{R}{p_1}} = -1$$

Analogamente, per x_2 :

$$\varepsilon_{x_2^d, p_2} = \frac{\partial x_2^d}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{x_2^d} = -\frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{R}{p_2^2} \cdot \frac{p_2}{\frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{R}{p_2}} = -1$$

Entrambe le domande hanno elasticità diretta al prezzo pari a -1 , risultato tipico della funzione di utilità Cobb-Douglas: la spesa per ciascun bene è una quota fissa del reddito, indipendente dai prezzi.

Elasticità al prezzo incrociate

Osservando le domande ottime

$$x_1^d = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{R}{p_1}, \quad x_2^d = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{R}{p_2},$$

si nota che x_1^d non dipende da p_2 e x_2^d non dipende da p_1 . Pertanto le elasticità incrociate sono entrambe nulle:

$$\varepsilon_{x_1^d, p_2} = \frac{\partial x_1^d}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{x_1^d} = 0, \quad \varepsilon_{x_2^d, p_1} = \frac{\partial x_2^d}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{x_2^d} = 0.$$

I due beni non sono né sostituti né complementi (in senso marshalliano): una variazione del prezzo di un bene non altera la quantità domandata dell'altro.

Elasticità al reddito e natura dei beni

L'elasticità al reddito della domanda di x_1 è:

$$\varepsilon_{x_1^d, R} = \frac{\partial x_1^d}{\partial R} \cdot \frac{R}{x_1^d} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{1}{p_1} \cdot \frac{R}{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \frac{R}{p_1}} = 1.$$

Analogamente:

$$\varepsilon_{x_2^d, R} = \frac{\partial x_2^d}{\partial R} \cdot \frac{R}{x_2^d} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{1}{p_2} \cdot \frac{R}{\frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{R}{p_2}} = 1.$$

Poiché $\varepsilon_{x_i^d, R} = 1 > 0$ per entrambi i beni, essi sono **beni normali**: al crescere del reddito la domanda di ciascun bene aumenta proporzionalmente. Non sono beni di Giffen, in quanto la domanda è decrescente nel proprio prezzo ($\varepsilon_{x_i^d, p_i} = -1 < 0$).

2 Beni Perfetti Sostituti

Data la seguente funzione di utilità

$$U(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

Calcolare:

1. Le domande ottime per i due beni
2. Il paniere ottimo quando $R = 30$, $p_1 = 3$, $p_2 = 1$

2.1 Soluzione

Punto 1: Domande ottime

La funzione di utilità $U(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ è **lineare**: le curve di indifferenza sono rette con pendenza -2 , e i due beni sono **perfetti sostituti**. Il Saggio Marginale di Sostituzione è costante:

$$SMS = \frac{MU_1}{MU_2} = \frac{2}{1} = 2.$$

La pendenza del vincolo di bilancio è p_1/p_2 . Poiché le curve di indifferenza sono rette, la soluzione ottima è **sempre in un angolo** (soluzione a buca), salvo il caso degenerare in cui le due rette siano parallele. Il confronto tra SMS e p_1/p_2 determina il paniere ottimo:

$$(x_1^d, x_2^d) = \begin{cases} \left(\frac{R}{p_1}, 0\right) & \text{se } \frac{p_1}{p_2} < SMS = 2 \Rightarrow p_1 < 2p_2 \\ \left(0, \frac{R}{p_2}\right) & \text{se } \frac{p_1}{p_2} > SMS = 2 \Rightarrow p_1 > 2p_2 \\ \text{qualsiasi punto su } R = p_1x_1 + p_2x_2 & \text{se } \frac{p_1}{p_2} = 2 \Rightarrow p_1 = 2p_2 \end{cases}$$

L'intuizione è immediata: il consumatore acquista interamente il bene che offre più utilità per unità di spesa, cioè il bene con il rapporto MU_i/p_i maggiore:

$$\frac{MU_1}{p_1} = \frac{2}{p_1}, \quad \frac{MU_2}{p_2} = \frac{1}{p_2}.$$

Se $2/p_1 > 1/p_2$, ovvero $p_1 < 2p_2$, conviene comprare solo x_1 ; altrimenti solo x_2 .

Punto 2: Paniere ottimo con $R = 30$, $p_1 = 3$, $p_2 = 1$

Calcoliamo il rapporto tra i prezzi e confrontiamo con l' SMS :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{3}{1} = 3 > 2 = SMS.$$

Il vincolo di bilancio è **più ripido** delle curve di indifferenza: conviene spendere tutto il reddito in x_2 . Il paniere ottimo è:

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = \frac{R}{p_2} = \frac{30}{1} = 30.$$

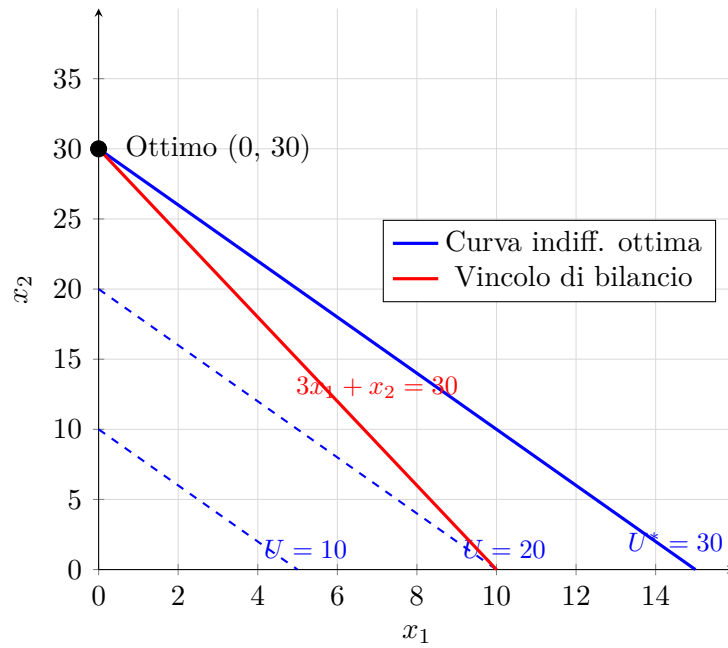


Figura 1: Curve di indifferenza (pendenza -2) e vincolo di bilancio (pendenza -3). Poiché il vincolo è più ripido delle curve di indifferenza, l'ottimo si trova nell'angolo $(0, 30)$.

Rappresentazione grafica

Il grafico mostra chiaramente che le curve di indifferenza (pendenza -2) sono *meno ripide* del vincolo di bilancio (pendenza -3): aumentando x_2 lungo il vincolo si raggiunge sempre un livello di utilità più alto, fino all'angolo in cui $x_1 = 0$.

3 Beni Perfetti Complementi

Si consideri la seguente funzione di utilità:

$$U = \min\{2x_1, x_2\}$$

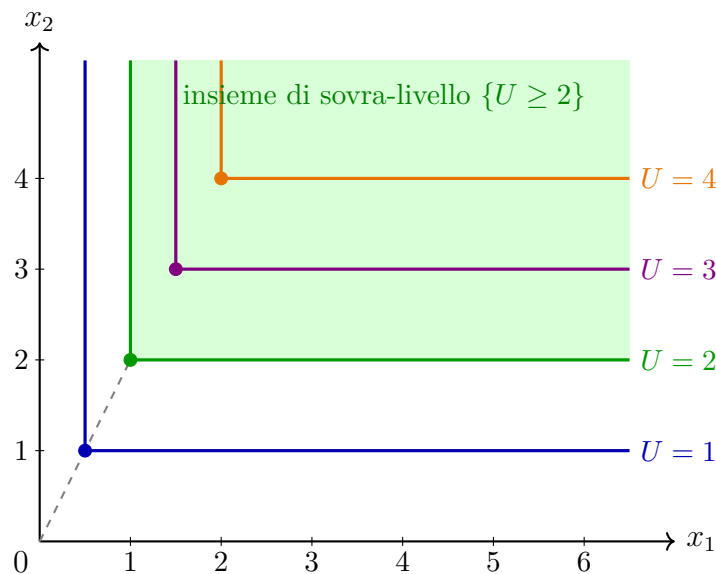
1. Tracciare sul piano x_1, x_2 il sistema di curve di indifferenza corrispondente e verificare la convessità delle preferenze.
2. Calcolare le domande ottime per i due beni.
3. Calcolare il paniere ottimo per un reddito del consumatore $R = 220$ e prezzi $p_1 = 5$ e $p_2 = 10$

3.1 Soluzione

Dato un generico livello di utilità $U = k > 0$, la condizione $\min 2x_1, x_2 = k$ si può dividere in due condizioni, a seconda di quale dei due argomenti sia il minore:

1. Ramo verticale: $2x_1 = k$ e $x_2 \geq k$, $\implies x_1 = k/2$
2. Ramo orizzontale: $2x_1 \geq k$ e $x_2 = k$

Ogni curva sarà quindi a forma di L, con vertice nel punto $(x_1, x_2) = (k/2, k)$. La bisettrice che definisce il rapporto di complementarità è dunque $x_2 = 2x_1$.



Per verificare la convessità/concavità delle curve di indifferenza, si prendano due punti qualsiasi appartenenti ad un determinato insieme di sovra-livello, ad esempio $\{U \geq 2\}$:

$$A \equiv (1, 4) \quad B \equiv (4, 2) \\ U(A) = U(B) = 2$$

Si prenda una combinazione convessa di questi due punti, dato un generico coefficiente α , in questo caso $\alpha = 0.5$:

$$U[\alpha A + (1 - \alpha)B] = \\ U[0.5(1) + 0.5(4); 0.5(4) + 0.5(2)] = \\ U(2.5; 3) = 3 > 2$$

Le preferenze sono dunque convesse, dato che l'utilità del paniere derivato ottenuto come combinazione di due panieri di partenza è maggiore dell'utilità originaria.

Punto 2: Domande ottime

Con beni perfetti complementi, unità aggiuntive di un solo bene non aumentano l'utilità: consumare di più di x_1 senza aumentare x_2 (o viceversa) lascia U invariata. Il consumatore non ha quindi mai convenienza a trovarsi su un ramo orizzontale o verticale della curva di indifferenza, ma sempre nel **vertice** dell' L , dove i due argomenti del minimo si eguagliano:

$$2x_1 = x_2.$$

Sostituiamo questa condizione nel vincolo di bilancio $R = p_1x_1 + p_2x_2$:

$$R = p_1x_1 + p_2(2x_1) = x_1(p_1 + 2p_2).$$

Otteniamo così le domande ottime:

$$\boxed{x_1^d = \frac{R}{p_1 + 2p_2}, \quad x_2^d = \frac{2R}{p_1 + 2p_2}.$$

Punto 3: Paniere ottimo con $R = 220$, $p_1 = 5$, $p_2 = 10$

Sostituiamo i valori numerici nelle domande ottime:

$$x_1^* = \frac{220}{5 + 2 \cdot 10} = \frac{220}{25} = 8.8,$$

$$x_2^* = 2 \cdot x_1^* = 2 \cdot 8.8 = 17.6.$$

Verifica sul vincolo di bilancio:

$$p_1x_1^* + p_2x_2^* = 5 \cdot 8.8 + 10 \cdot 17.6 = 44 + 176 = 220 = R. \quad \checkmark$$

Verifica della condizione di vertice:

$$2x_1^* = 2 \cdot 8.8 = 17.6 = x_2^*. \quad \checkmark$$

Il livello di utilità raggiunto è:

$$U^* = \min\{2 \cdot 8.8, 17.6\} = \min\{17.6, 17.6\} = 17.6.$$

Rappresentazione grafica

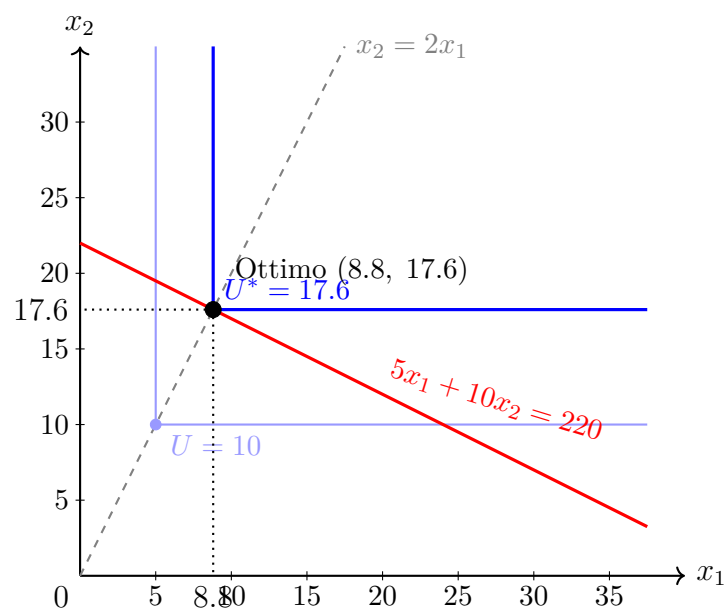


Figura 2: Curve di indifferenza a L con vertici sulla retta $x_2 = 2x_1$ e vincolo di bilancio $5x_1 + 10x_2 = 220$. L'ottimo si trova nel vertice della curva di indifferenza che tocca il vincolo.