

Esercitazione 2

Lorenzo Bozzoli*

29/04/2024

Esercizio 1 I giocatori 1 e 2 stanno contrattando come dividersi un dollaro. Entrambi i giocatori dichiarano simultaneamente l'importo che vorrebbero avere, $s_1 > 0$ e $s_2 > 0$, rispettivamente. Se $s_1 + s_2 \leq 1$, ciascun giocatore riceve quanto ha dichiarato; se $s_1 + s_2 > 1$ allora entrambi i giocatori ricevono zero.

1. Identificate tutti gli equilibri di Nash in strategie pure di questo gioco.
2. Esistono equilibri in strategie debolmente dominate? Spiegare.

Esercizio 2 Due risparmiatori hanno depositato un'unità indivisibile di capitale D nella stessa banca. La banca ha investito i depositi in un progetto a lungo termine che, giunto a maturazione, rende $2R$ dove $R > D$. Entrambi gli investitori hanno il diritto di ritirare il proprio deposito a vista prima che il progetto venga a compimento (nota: per semplicità, il deposito può essere ritirato esclusivamente per intero). Se la banca è costretta a liquidare l'investimento prima della scadenza, un totale di $2r$ viene recuperato con $D > r > \frac{D}{2}$.

Se solo un deposito viene ritirato in anticipo, il cliente restante ottiene la totalità dei fondi rimanenti dopo la liquidazione ($2r - D < D$). Se entrambi i giocatori ritirano in anticipo, l'investimento viene liquidato e i ritorni parziali $2r$ vengono equamente divisi tra i clienti. Se nessuno ritira, i ritorni finali $2R$ vengono divisi equamente tra i clienti (*Gibbons, 1992, 22.B*).

1. Si fornisca la rappresentazione strategica del gioco con bi-matrice e le funzioni di risposta ottima dei giocatori.
2. Si fornisca una previsione sull'esito del gioco.
3. Questo gioco è una versione semplificata del noto modello di *corsa agli sportelli* à la Diamond e Dybvig. Provate a fornire una spiegazione intuitiva della rilevanza di questo esempio in termini di stabilità finanziaria.

Esercizio 3 In un gruppo di n cacciatori, ogni cacciatore ha due opzioni: può cooperare all'inseguimento di un cervo, o distaccarsi e catturare da solo una lepre. Se tutti i cacciatori inseguono il cervo, lo catturano e se lo dividono equamente; se un cacciatore si dedica individualmente alla cattura di una lepre, il cervo scappa e la lepre viene presa dal cacciatore che si è distaccato dal gruppo. Ogni cacciatore preferisce una quota $1/n$ di cervo ad una singola lepre.

1. Per il caso in cui $n = 2$, si fornisca la rappresentazione strategica del gioco e si trovino gli equilibri di Nash.
2. Si supponga ora che i cacciatori siano $n > 2$ e che debbano collaborare tutti per catturare il cervo. Si trovino gli equilibri di Nash di questa variante, in cui le preferenze dei cacciatori rimangono le stesse del gioco originario.

*e-mail: lor.bozzoli@gmail.com

3. Si trovino gli equilibri di Nash della variante del gioco precedente, con $n > 2$ giocatori, in cui m cacciatori sono sufficienti per catturare il cervo, con $2 \leq m < n$.
4. Si assuma che ogni cacciatore preferisca la frazione $1/k$ di cervo alla lepre, ma preferisca la lepre a qualsiasi frazione inferiore di cervo, dove k è un numero intero e $m \leq k \leq n$. Si trovino gli equilibri di Nash del gioco strategico che rappresenta questa situazione.

Esercizio 4 Si consideri il seguente modello di oligopolio con $n > 2$ imprese. Sia q_i la quantità prodotta dall'impresa i . Il prezzo di mercato p dipende dalla produzione totale:

$$p(q_1, \dots, q_n) = \begin{cases} a - b \sum_{i=1}^{\infty} q_i & \text{se } a - b \sum (q_i) > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $a > 0$, $b > 0$. Il costo totale dell'impresa i per produrre la quantità q_i è $C_i(q_i) = cq_i$. Cioè, non ci sono costi fissi e il costo marginale è costante e uguale a c . Si supponga che $c < a$. Si supponga che tutte le imprese scelgano le loro quantità simultaneamente.

1. Si definiscano strategie e payoff per i giocatori.
2. Si individui l'equilibrio di Nash simmetrico.
3. Cosa succede quando n si approssima all'infinito? Qual è l'interpretazione economica del risultato del limite?

Esercizio 5 Si consideri il modello di oligopolio descritto nell'Esercizio 4 e si supponga che $n = 2$. Si assuma che ciascun duopolista abbia costi medi e marginali costanti, ma che $0 < c_1 < c_2$. Si mostri che l'impresa 1 avrà maggiori profitti e produrrà una quota maggiore dell'output di mercato rispetto all'impresa 2 nell'equilibrio di Nash.

Esercizio 6 Trova tutti gli equilibri di Nash (puri e misti) del gioco rappresentato nella seguente bi-matrice:

		Player 2	
		L	R
Player 1	U	(4,5)	(1,1)
	D	(2,0)	(3,6)

Esercizio 7 Due giocatori $N = \{P_1, P_2\}$ devono decidere simultaneamente se interagire cooperare in maniera pacifica (C) o deviare verso un atteggiamento conflittuale (D). Entrambi preferiscono la pace alla guerra. Dichiarare guerra aspettandosi un avversario pacifico dà un payoff α , mentre arrendersi quando ci si aspetta la guerra dà β . Trovate gli equilibri puri e misti del seguente gioco al variare di α e β e commentate:

		P_2	
		C	D
P_1	C	(2, 2)	(β , α)
	D	(α , β)	(1, 1)