

Esercitazione 3

Eloisa Campioni

29-30/04/2025

Esercizio 1 Considerate il seguente gioco in cui G_1 sceglie la riga, G_2 la colonna e G_3 la matrice.

	L	M	R		L	M	R
T	(1,1,1)	(0, 0, 1)	(4, 1, 1)	T	(5,1,2)	(0,0,2)	(4,1,2)
B	(2,1, 2)	(3, 2, 2)	(2, 3, 2)	B	(2, 1, 1)	(3,2,1)	(2,3,1)
		$a_3 = W$				$a_3 = X$	

- Fornite la rappresentazione in forma strategica del gioco.
- Quale strategia di quale giocatore è strettamente dominata?
- Quale strategia è debolmente dominata? Appare in un equilibrio di Nash?
- Definite gli elementi degli insiemi:
 - A_{-2} .
 - $A_1 \times A_3$.
 - $A_2 \setminus \{M; R\}$.
 - $E = \{a \in A : u_1(a) = 4\}$.
- Vero o falso:
 - $(1, 1, 1) \in A$.
 - $\{L; M\} \in A_2$.
 - $\{T; W; X\} \subset A_{-2}$.
 - $|A_1| = |A_2|$ dove $|S|$ indica la cardinalità di un insieme S .
- Esprimi questi concetti in simboli:
 - La risposta ottima di G_3 quando gli altri giocatori giocano (T, L) è X .
 - La strategia M **non** è debolmente dominata da L per G_2 .

Esercizio 2 Considera il gioco seguente, che replica un'asta. Ci sono $n > 1$ giocatori che competono per un premio $v > 0$. I partecipanti presentano le loro offerte simultaneamente in busta chiusa. Il partecipante con l'offerta più alta vince il premio e paga la sua offerta (se due giocatori presentano l'offerta migliore, hanno uguale probabilità di ottenere il premio e pagare la loro offerta). Un partecipante non paga nulla se non ottiene il premio.

1. Descrivete formalmente questa asta come un gioco strategico, con gli insiemi di azioni e le funzioni di payoff di ogni giocatore.
2. Descrivete tutti gli equilibri di Nash in strategie pure.

Esercizio 3 [Per 30/04/2025] Trova tutti gli equilibri di Nash (puri e misti) del gioco rappresentato nella seguente bi-matrice:

		Player 2	
		L	R
Player 1	U	(4,5)	(1,1)
	D	(2,0)	(3,6)

Esercizio 4 [Per 30/04/2025] Due giocatori $N = \{P_1, P_2\}$ devono decidere simultaneamente se interagire (cooperare) in maniera pacifica (C) o deviare verso un atteggiamento conflittuale (D). Entrambi preferiscono la pace alla guerra. Dichiarare guerra aspettandosi un avversario pacifico dà un payoff α , mentre arrendersi quando ci si aspetta la guerra dà β . Trovate gli equilibri puri e misti del seguente gioco al variare di α e β e commentate:

		P_2	
		C	D
P_1	C	(2, 2)	(β, α)
	D	(α, β)	(1, 1)

Esercizio 5 Ciascuno di due coinquilini $i \in \{P_1, P_2\}$ ha vinto 100 euro alla lotteria; entrambi devono decidere simultaneamente una quota $s_i \in [0, 100]$ della vincita da investire in un fondo comune per le riparazioni. Il denaro non speso in riparazioni ha utilità lineare. L'utilità di P_i per un profilo di strategie $s = (s_1, s_2)$ è dunque $u_i(s) = 1 - s_i + G(s)$ dove il beneficio $G(s)$ dell'investimento può avere varie forme:

1. Assumete che il denaro sia investito nel riparare il riscaldamento, così da dare un beneficio diretto di $G(s) = g(s_1 + s_2)$ a entrambi i coinquilini: per $1 < g < 2$ qual è l'equilibrio di Nash?
2. Assumete invece che il denaro sia investito in un nuovo frigorifero con valore $G(s) = g(s_1 + s_2)$, che ciascun coinquilino può occupare a metà. Qual è l'esito del gioco? Quale altro gioco ricorda, e perché l'esito è inefficiente?
3. Assumete di nuovo che $G(s)$ sia una riparazione del riscaldamento, ma che il costo minimo dei lavori sia di cento euro e un centesimo; ovvero, $G(s) = 0$ quando $s_1 + s_2 \leq 100$. Rappresentate i payoff e trovate l'esito del gioco: quale altro gioco vi ricorda?
4. Assumete infine che il beneficio dell'investimento non possa essere più alto di $G^* = 100g$, ovvero che investire più oltre un tetto di cento euro non porti benefici aggiuntivi. Rappresentate i payoff e spiegate cosa succede in questo caso.

Esercizio 6 [Per 30/04/2025] Si consideri un interazione tra venditori di gelati e consumatori, per semplicità disposti lungo un unico viale lungo 1 km. I consumatori sono uniformemente distribuiti lungo un viale, ed i prezzi dei gelati sono regolati, dunque i consumatori si recano dal venditore più vicino per camminare il meno possibile. Supponete che il prezzo sia tale che i consumatori sono disposti a camminare anche un chilometro per comprare un gelato. I venditori scelgono la loro disposizione lungo il viale simultaneamente. Se più di un venditore è presente nello stesso punto, questi si dividono equamente i clienti.

1. Considerate il gioco con $n = 2$ venditori. Trovate ogni equilibrio di Nash in strategie pure.
2. Mostrate che con tre venditori, non esiste alcun equilibrio di Nash in strategie pure.