

Approfondimento Funzione Cobb-Douglas

Dottoranda Federica Orioli fedorioli@libero.it
Corso di Macroeconomia Professor Fabrizio Mattesini

2024-2025

La Funzione di Produzione Neoclassica

Data la funzione di produzione:

$$Y = A \left[L^{\frac{1}{2}} \times K^{\frac{1}{2}} \right]$$

in cui Y è la quantità prodotta, A è un parametro di efficienza positivo che indica il livello della tecnologia, L è il fattore lavoro e K è il fattore capitale, verificare se tale funzione è **Neoclassica**.

Le Proprietà della Funzione di Produzione Neoclassica sono le seguenti:

- La produttività marginale dei fattori di produzione è positiva e decrescente (rendimenti decrescenti dei fattori).

- I rendimenti di scala sono costanti.

- Vale il Teorema di esaurimento del prodotto (i.e. Teorema di Eulero).

Ovvero, se i fattori di produzione sono remunerati in base alle rispettive produttività marginali, e se la funzione di produzione ha rendimenti di scala costanti, allora la remunerazione dei fattori copre l'intero valore della produzione.

Verifichiamo se la funzione di produzione in esame gode di tali proprietà.

i.

$$\begin{aligned} PMG_L &= \frac{dY}{dL} = A \left[\frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} \times K^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{A}{2} \left(\frac{K}{L} \right)^{\frac{1}{2}} > 0, \\ \frac{dPMG_L}{dL} &= A \left[-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} L^{-\frac{3}{2}} \times K^{\frac{1}{2}} \right] = -\frac{A}{4} \left[L^{-\frac{3}{2}} \times K^{\frac{1}{2}} \right] < 0 \end{aligned}$$

La PMG_L è positiva e decrescente.

$$\begin{aligned} PMG_K &= \frac{dY}{dK} = A \left[\frac{1}{2} K^{-\frac{1}{2}} \times L^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{A}{2} \left(\frac{L}{K} \right)^{\frac{1}{2}} > 0, \\ \frac{dPMG_K}{dK} &= A \left[-\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} K^{-\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}} \right] = -\frac{A}{4} \left[K^{-\frac{3}{2}} \times L^{\frac{1}{2}} \right] < 0 \end{aligned}$$

La PMG_K è positiva e decrescente.

Dunque, si hanno rendimenti decrescenti dei fattori.

ii.

La funzione di produzione rappresentata fa parte di una classe di funzioni di produzione note con il nome **Cobb-Douglas**. In generale, vale che:

$$\begin{aligned}\sum_i^n \alpha_i &> 1 \text{ i rendimenti di scala sono crescenti,} \\ \sum_i^n \alpha_i &< 1 \text{ i rendimenti di scala sono decrescenti,} \\ \sum_i^n \alpha_i &= 1 \text{ i rendimenti di scala sono costanti,}\end{aligned}$$

dove con α_i si intendono gli esponenti della funzione.

Poichè:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

i rendimenti di scala sono costanti.

Si noti che, la proprietà di rendimenti di scala costanti può essere dimostrata anche in altro modo. La funzione $Y = f(L, K)$ gode di rendimenti crescenti, costanti o decrescenti di scala se valgono rispettivamente le seguenti:

1) $f(nL, nK) > nf(L, K)$.

2) $f(nL, nK) = nf(L, K)$.

3) $f(nL, nK) < nf(L, K)$.

Verifichiamo tali proprietà relativamente alla nostra funzione:

$$\begin{aligned}Y &= AL^{\frac{1}{2}} \times K^{\frac{1}{2}}, \\ A(nL)^{\frac{1}{2}} \times (nK)^{\frac{1}{2}} &= An^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}(L^{\frac{1}{2}} \times K^{\frac{1}{2}}) = nAL^{\frac{1}{2}} \times K^{\frac{1}{2}} = nY.\end{aligned}$$

iii.

Per comprendere il significato del Teorema di Eulero, è necessario capire cosa significa dire che i fattori di produzione sono remunerati in base alle rispettive produttività marginali. Consideriamo, ad esempio, il fattore lavoro. Nel decidere se assumere o meno un lavoratore in più e volendo, ovviamente, massimizzare il profitto, una **impresa concorrenziale** valuta l'impatto di questa decisione sul profitto stesso (che lo ricordiamo è dato dalla differenza fra i ricavi ed i costi di produzione). In pratica, l'impresa mette a confronto il ricavo aggiuntivo (detto ricavo marginale in Microeconomia) che ottiene dall'aumento di produzione derivante dall'utilizzo di un lavoratore in più nel processo produttivo, e la remunerazione aggiuntiva, o costo marginale, che dovrà corrispondere al lavoratore in più, ovvero il suo salario nominale w . Il ricavo marginale si ottiene, ovviamente, moltiplicando l'output incrementale ottenuto dall'uso di un

lavoratore in più, che altro non è che la PMG_L , per il prezzo di vendita di mercato del prodotto p . In definitiva, quindi, l'impresa confronta il ricavo marginale (incremento del ricavo totale) $PMG_L \times p$ ed il costo marginale (incremento del costo totale di produzione) w .

Se:

$$PMG_L \times p > w,$$

allora il ricavo marginale supera il costo marginale. Il profitto, assumendo un lavoratore in più, cresce, perciò non è ancora massimo.

Se:

$$PMG_L \times p < w,$$

allora il ricavo marginale è inferiore al costo marginale. Il profitto, assumendo un lavoratore in più, decresce, perciò il suo valore massimo è stato oltrepassato.

Se:

$$PMG_L \times p = w,$$

allora il ricavo marginale è uguale al costo marginale. Il profitto, assumendo un lavoratore in più, non muta, perciò il punto di massimo è stato raggiunto.

Dunque, l'impresa concorrenziale massimizza il profitto se:

$$\begin{aligned} PMG_L \times p &= w, \\ PMG_L &= w/p. \end{aligned}$$

La stessa cosa deve valere per l'altro fattore produttivo, il fattore capitale:

$$\begin{aligned} PMG_K \times p &= re, \\ PMG_K &= re/p, \end{aligned}$$

dove re rappresenta la rendita del capitale, ovvero la remunerazione nominale di ogni unità di capitale.

In sintesi, l'impresa concorrenziale che massimizza il profitto segue una regola molto semplice nelle proprie decisioni di impiego dei fattori di produzione: **l'impresa domanda ciascun fattore di produzione in misura tale che il prodotto marginale del fattore stesso sia uguale al suo prezzo in termini reali**. Ovvero, i fattori di produzione sono remunerati in base alle rispettive produttività marginali.

A questo punto, ipotizzando di trovarci in una economia concorrenziale in cui i fattori sono remunerati in base al prodotto marginale e presentando la funzione di produzione che stiamo analizzando rendimenti costanti di scala, non rimane che verificare che la remunerazione dei fattori copra l'intero valore della produzione.

La remunerazione complessiva del fattore lavoro, ovvero il monte salari reale, si ottiene moltiplicando la remunerazione del singolo lavoratore (il salario reale individuale), PMG_L , per il numero di lavoratori presenti nel sistema economico:

$$PMG_L \times L = \text{remunerazione complessiva del fattore lavoro} = W/P,$$

dove W rappresenta il salario nominale aggregato dell'economia e P è l'indice di prezzo del sistema economico.

La remunerazione complessiva del fattore capitale, similmente, si ottiene moltiplicando la remunerazione reale della singola unità di capitale (la rendita reale), PMG_K , per il numero di unità di capitale presenti nel sistema economico:

$$PMG_K \times K = \text{remunerazione complessiva del fattore capitale} = R/P,$$

dove R rappresenta la rendita aggregata nominale.

Perchè valga il Teorema di Eulero, si deve avere, quindi, che:

$$(PMG_L \times L) + (PMG_K \times K) = Y.$$

Verifichiamolo:

$$A \left[\frac{1}{2} L^{-\frac{1}{2}} \times K^{\frac{1}{2}} \right] \times L + A \left[\frac{1}{2} K^{-\frac{1}{2}} \times L^{\frac{1}{2}} \right] \times K = \frac{1}{2} A \left[L^{\frac{1}{2}} \times K^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{1}{2} A \left[K^{\frac{1}{2}} \times L^{\frac{1}{2}} \right].$$

Ma:

$$A \left[L^{\frac{1}{2}} \times K^{\frac{1}{2}} \right] = Y.$$

Quindi, la precedente espressione diventa:

$$\frac{1}{2} Y + \frac{1}{2} Y = Y,$$

ovvero:

$$(PMG_L \times L) + (PMG_K \times K) = Y.$$

Perciò, vale il Teorema di esaurimento del prodotto.

La funzione di produzione in esame è una Funzione di Produzione Neoclassica.

Si noti che, in questo esercizio si assume che gli attori dell'economia siano i lavoratori, i proprietari dei beni capitali e le imprese. Il reddito che rimane alle imprese dopo la remunerazione dei fattori produttivi è il profitto economico, ovvero:

$$\text{Profitto economico} = Y - [(PMG_L \times L) + (PMG_K \times K)].$$

Ciò implica, nel nostro esercizio, un profitto economico nullo. In che modo, allora, questa funzione di produzione è compatibile con l'esistenza di un profitto per le imprese nel mondo reale? La domanda sorge perchè, sovente, il profitto economico viene confuso con la rendita del capitale. In effetti, è vero che il reddito si ripartisce fra salari, rendite e profitto economico, ma è anche vero che, di norma, sono proprio le imprese le proprietarie dei beni capitali. Nella realtà, quindi, si osserva l'esistenza di un profitto contabile, che è cosa diversa dal profitto economico e che è così definito:

$$\text{Profitto contabile} = \text{Profitto economico} + (PMG_K \times K).$$

Poichè la funzione Cobb-Douglas viene molto usata in Macroeconomia, è utile soffermarci su altre sue importanti caratteristiche. La funzione di produzione Cobb-Douglas è stata sviluppata negli anni '20 da un docente di economia, Paul Douglas, e da un matematico, Charles Cobb. Analizzando i dati relativi agli Stati Uniti, Douglas aveva notato un fatto sorprendente: la ripartizione del reddito aggregato tra capitale e lavoro era rimasta più o meno la stessa per un periodo relativamente lungo. In altre parole, all'aumentare della prosperità economica, anche il reddito totale dei lavoratori e la remunerazione totale del capitale crescevano di pari passo. Ciò indusse Douglas a chiedersi se fosse possibile costruire una funzione di produzione tale per cui, se i fattori fossero stati remunerati sempre secondo il loro prodotto marginale, avrebbe avuto come risultato l'attribuzione di una quota costante di reddito ai fattori. In pratica, questa funzione di produzione, avrebbe dovuto godere della seguente proprietà:

$$PMG_K \times K = \text{remunerazione complessiva del fattore capitale} = \alpha Y.$$

$$PMG_L \times L = \text{remunerazione complessiva del fattore lavoro} = (1 - \alpha)Y.$$

Dove α è una costante di valore compreso fra zero ed uno, che misura, appunto, la quota di reddito spettante al capitale.

La risposta alla domanda di Douglas fu data da Cobb, che dimostrò che la funzione che gode di tali proprietà è:

$$Y = A \times K^\alpha \times L^{1-\alpha},$$

dove A è un parametro positivo che misura la produttività della tecnologia disponibile. Questa funzione di produzione prende, appunto, il nome di funzione di produzione Cobb-Douglas. Tale funzione gode di alcune importanti proprietà.

A. Come già osservato, la funzione di produzione Cobb-Douglas è una funzione di produzione Neoclassica. Rivediamo per completezza le proprietà della funzione Neoclassica nel caso generale di esponenti a somma 1.

1) La produttività marginale dei fattori di produzione è positiva e decrescente:

$$\begin{aligned} PMG_L &= \frac{dY}{dL} = (1 - \alpha) \times A \times K^\alpha \times L^{-\alpha} > 0, \\ \frac{dPMG_L}{dL} &= -\alpha(1 - \alpha) \times A \times K^\alpha \times L^{-\alpha-1} < 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PMG_K &= \frac{dY}{dK} = \alpha \times A \times K^{\alpha-1} \times L^{1-\alpha} > 0, \\ \frac{dPMG_K}{dK} &= \alpha(\alpha - 1) \times A \times K^{\alpha-2} \times L^{1-\alpha} < 0. \end{aligned}$$

Da queste equazioni, possiamo vedere anche che cosa provoca un cambiamento nel prodotto marginale dei due fattori.

In particolare, un aumento del capitale provoca un aumento della produttività marginale del lavoro:

$$\frac{dPMG_L}{dK} = \alpha(1 - \alpha) \times A \times K^{\alpha-1} \times L^{-\alpha} > 0.$$

Un aumento del lavoro provoca un aumento della produttività marginale del capitale:

$$\frac{dPMG_K}{dL} = \alpha(1 - \alpha) \times A \times K^{\alpha-1} \times L^{-\alpha} > 0.$$

Infine, una innovazione tecnologica che faccia aumentare A , fa aumentare proporzionalmente il prodotto marginale di entrambi i fattori.

La proprietà di rendimenti decrescenti dei fattori non è poi così inverosimile nella realtà, anzi. Essa ci dice che, all'aumentare di uno solo dei fattori di produzione, fermo rimanendo l'altro, la produzione aumenta, ma aumenti del fattore identici comportano aumenti di prodotto tanto minori, quanto più elevato è il livello di partenza del fattore stesso. Cerchiamo di comprendere meglio tale concetto; immaginiamo che il capitale sia rappresentato da computer. Pensiamo che in una azienda vi siano tre segretarie (il nostro fattore lavoro costante) e che nell'azienda venga introdotto un computer. Sicuramente l'introduzione del computer aumenterà la produzione delle tre segretarie, poiché alcuni dei compiti più dispendiosi di tempo saranno svolti in modo automatico dal computer. Anche l'introduzione di un secondo computer avrà l'effetto di aumentare la produzione del gruppo, ma tale aumento sarà probabilmente inferiore rispetto all'aumento indotto dalla introduzione del primo computer, e così via. E' chiaro, infatti, che quando tutte le segretarie avranno il loro computer, introdurne ancora potrà aumentare di poco la produzione.

2) I rendimenti di scala sono costanti, ovvero deve valere:

$$A \times (nK)^\alpha \times (nL)^{1-\alpha} = nY.$$

$$A \times (nK)^\alpha \times (nL)^{1-\alpha} = A \times n^\alpha \times K^\alpha \times n^{1-\alpha} \times L^{1-\alpha} = n^\alpha \times n^{1-\alpha} \times A \times K^\alpha \times L^{1-\alpha},$$

ma:

$$\begin{aligned} n^a \times n^{1-\alpha} &= n, \\ A \times K^\alpha \times L^{1-\alpha} &= Y, \end{aligned}$$

quindi:

$$A \times (nK)^\alpha \times (nL)^{1-\alpha} = nY.$$

Esiste un metodo molto più semplice e sbrigativo per verificare che i rendimenti di scala di questa funzione sono costanti. In generale, data una funzione del tipo:

$$Y = A \times K^\alpha \times L^\beta \dots \alpha, \beta > 0,$$

vale la seguente regola. Se:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &> 1 \Rightarrow \text{i rendimenti di scala sono crescenti,} \\ \alpha + \beta &< 1 \Rightarrow \text{i rendimenti di scala sono decrescenti,} \\ \alpha + \beta &= 1 \Rightarrow \text{i rendimenti di scala sono costanti.} \end{aligned}$$

3) Vale il Teorema di Eulero, infatti:

$$\begin{aligned} PMG_L \times L &= [(1 - \alpha) \times A \times K^\alpha \times L^{-\alpha}] \times L, \\ PMG_L \times L &= (1 - \alpha) \times A \times K^\alpha \times L^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PMG_K \times K &= (\alpha \times A \times K^{\alpha-1} \times L^{1-\alpha}) \times K, \\ PMG_K \times K &= \alpha \times A \times K^\alpha \times L^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (PMG_L \times L) + (PMG_K \times K) &= (1 - \alpha) \times A \times K^\alpha \times L^{1-\alpha} + \alpha \times A \times K^\alpha \times L^{1-\alpha} = \\ &= A \times K^\alpha \times L^{1-\alpha}(1 - \alpha + \alpha) = A \times K^\alpha \times L^{1-\alpha} = Y. \end{aligned}$$

Quindi:

$$(PMG_L \times L) + (PMG_K \times K) = Y.$$

B. Riprendiamo ora le espressioni:

$$\begin{aligned} PMG_L \times L &= (1 - \alpha) \times A \times K^\alpha \times L^{1-\alpha}, \\ PMG_K \times K &= \alpha \times A \times K^\alpha \times L^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Il rapporto tra reddito da lavoro e da capitale, se la funzione di produzione è una Cobb-Douglas, è costante, esattamente come osservato da Douglas.

Le ultime due espressioni viste, essendo $A \times K^\alpha \times L^{1-\alpha} = Y$, possono anche essere scritte come:

$$\begin{aligned} PMG_L \times L &= (1 - \alpha)Y, \\ PMG_K \times K &= \alpha Y. \end{aligned}$$

Si vede chiaramente che, la funzione di produzione Cobb-Douglas attribuisce una quota costante di reddito ai fattori: la quota $1 - \alpha$ del reddito spetta al fattore lavoro e la quota α spetta, invece, al fattore capitale. Il monte salari è $(1 - \alpha)Y$, mentre il reddito spettante al fattore capitale è αY . Il rapporto tra reddito da lavoro e reddito da capitale è, quindi:

$$\frac{(1 - \alpha)Y}{\alpha Y} = \frac{(1 - \alpha)}{\alpha}.$$

Il rapporto tra reddito da lavoro e da capitale, se la funzione di produzione è una Cobb-Douglas, è, quindi, costante. La quota di reddito spettante a ciascun fattore non dipende nè dalla quantità dei fattori di produzione, nè dallo stato della tecnologia A , ma solo dal parametro α .

In effetti, i dati storici relativi ai paesi industrializzati dell'Europa e del Nord America rivelano che la quota di reddito destinata al lavoro tende a rimanere stabile nel tempo, intorno al 70-75% del reddito totale. Questo è compatibile con una funzione di produzione Cobb-Douglas in cui si abbia $\alpha = 0,3$.

C. La produttività marginale del lavoro è proporzionale alla produttività media del lavoro, e la produttività marginale del capitale è proporzionale alla produttività media del capitale.

Dalle equazioni $PMG_L \times L = (1 - \alpha)Y$ e $PMG_K \times K = \alpha Y$, possiamo ricavare un'ultima espressione interessante:

$$\begin{aligned} PMG_L \times L &= (1 - \alpha)Y, \\ PMG_L &= (1 - \alpha) \frac{Y}{L}, \\ PMG_K \times K &= \alpha Y, \\ PMG_K &= \alpha \frac{Y}{K}. \end{aligned}$$

I termini $\frac{Y}{L}$ ed $\frac{Y}{K}$ sono definiti, rispettivamente, **produttività media del lavoro** e **produttività media del capitale**. Dunque, la produttività marginale del lavoro è proporzionale alla produttività media del lavoro, e la produttività marginale del capitale è proporzionale alla produttività media del capitale.