Corso di Macroeconomia Prof. Fabrizio Mattesini
Lezione 3 La crescita nel lunghissimo periodo (Modello di Solow)

Dottoressa Federica Orioli fedorioli@libero.it

2024-2025

Esercizio 1)

Si consideri il modello di Solow senza crescita della popolazione e senza progresso tecnologico.

Si assuma che in un dato paese la funzione di produzione sia:

$$Y = K^{\frac{1}{4}} \times \sqrt[4]{L^3}.$$

a. Questa funzione di produzione ha rendimenti costanti di scala? Perché?

b. Il capitale ha rendimenti marginali decrescenti? Dimostratelo.

c. Il lavoro ha rendimenti marginali decrescenti? Dimostratelo.

d. Trasformate la funzione di produzione in una relazione tra il prodotto per addetto e il capitale per addetto e fornitene una rappresentazione grafica. Spiegatene l'andamento.

e. Per un dato tasso di risparmio (s) e un dato tasso di deprezzamento (δ), fornite l'espressione del capitale per addetto di stato stazionario.

f. Ricavate l'espressione del prodotto per addetto di stato stazionario.

g. Calcolate i livelli delle grandezze di cui ai punti e ed f quando entrambi i tassi di risparmio e deprezzamento sono pari al 10%.

h. Supponete ora che il tasso di risparmio raddoppi (a parità di tutto il resto). Cosa succede al prodotto per addetto di stato stazionario? E al consumo per addetto?

a. Questa funzione di produzione ha rendimenti costanti di scala? Perché?

$$Y = K^{\frac{1}{4}} \times L^{\frac{3}{4}}.$$

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1.$$

Ciò implica rendimenti di scala costanti.

b. Il capitale ha rendimenti marginali decrescenti? Dimostratelo.

Per verificare che il fattore capitale presenti rendimenti decrescenti, basta calcolare la derivata prima e seconda della funzione di produzione rispetto a K:

$$\begin{aligned}
\frac{dY}{dK} &= PMG_K = \frac{1}{4}K^{-\frac{3}{4}} \times L^{\frac{3}{4}} > 0, \\
\frac{dPMG_K}{dK} &= -\frac{3}{16}K^{-\frac{7}{4}} \times L^{\frac{3}{4}} < 0.
\end{aligned}$$

La produttività marginale del fattore capitale è positiva e decrescente.

c. Il lavoro ha rendimenti marginali decrescenti? Dimostratelo.

Per verificare che il fattore lavoro presenti rendimenti decrescenti, basta calcolare la derivata prima e seconda della funzione di produzione rispetto a L:

$$\begin{aligned}
\frac{dY}{dL} &= PMG_L = \frac{3}{4}K^{\frac{1}{4}} \times L^{-\frac{1}{4}} > 0, \\
\frac{dPMG_L}{dL} &= -\frac{3}{16}K^{\frac{1}{4}} \times L^{-\frac{5}{4}} < 0.
\end{aligned}$$

La produttività marginale del fattore lavoro è positiva e decrescente.

d. Trasformate la funzione di produzione in una relazione tra il prodotto per addetto e il capitale per addetto e fornitene una rappresentazione grafica. Spiegatene l'andamento.

Proprio perchè la funzione di produzione presenta rendimenti di scala costanti, è possibile dividere il membro di sinistra della funzione stessa (Y) e quello di destra ($K^{\frac{1}{4}} \times L^{\frac{3}{4}}$) per L, ottenendo, in tal modo, una espressione in termini per addetto della funzione di produzione:

$$\begin{aligned}
Y &= K^{\frac{1}{4}} \times L^{\frac{3}{4}}, \\
\frac{Y}{L} &= y = K^{\frac{1}{4}} \times \frac{L^{\frac{3}{4}}}{L} = K^{\frac{1}{4}} \times L^{-\frac{1}{4}}, \\
y &= \frac{K^{\frac{1}{4}}}{L^{\frac{1}{4}}} = (\frac{K}{L})^{\frac{1}{4}} = k^{\frac{1}{4}} = f(k).
\end{aligned}$$

e. Per un dato tasso di risparmio (s) e un dato tasso di deprezzamento (δ), fornite l'espressione del capitale per addetto di stato stazionario.

In stato stazionario, la variazione dello stock di capitale pro-capite (Δk) è nulla, ovvero l'investimento pro-capite i è uguale all'ammortamento del capitale pro-capite δk:

$$\Delta k = i - \delta k = 0.$$

Si ricordi che nel modello di Solow il prodotto per occupato y si divide fra il consumo per occupato c e l'investimento per occupato i:

$$y = c + i.$$

Essendo s il tasso di risparmio:

$$c = (1 - s)y,$$

da cui, sostituendo:

$$y = (1 - s)y + i.$$

$$i = sy = sf(k).$$

Riprendiamo la condizione di ss e sostituiamo:

$$\begin{aligned}
\Delta k &= i - \delta k = 0, \\
\Delta k &= sf(k) - \delta k = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
sf(k) - \delta k &= 0, \\
sk^{\frac{1}{4}} &= \delta k, \\
\frac{k^{\frac{1}{4}}}{k} &= \frac{\delta}{s}, \\
k^{-\frac{3}{4}} &= (\frac{\delta}{s}), \\
k^* &= (\frac{s}{\delta})^{\frac{4}{3}}.
\end{aligned}$$

f. Ricavate l'espressione del prodotto per addetto di stato stazionario.

$$\begin{aligned}
y^* &= k^{*\frac{1}{4}}, \\
y^* &= \left[(\frac{s}{\delta})^{\frac{4}{3}}\right]^{\frac{1}{4}} = (\frac{s}{\delta})^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

g. Calcolate i livelli delle grandezze di cui ai punti e ed f quando entrambi i tassi di risparmio e deprezzamento sono pari al 10%.

Le stesse grandezze di cui ai punti **e.** ed **f.**, per $s = \delta = 0,1$, sono:

$$\begin{aligned}
k^* &= (\frac{s}{\delta})^{\frac{4}{3}} = 1, \\
y^* &= (\frac{s}{\delta})^{\frac{1}{3}} = 1,
\end{aligned}$$

da cui si ricava anche che, il livello di consumo di stato stazionario c^* è:

$$\begin{aligned} c^* &= (1-s)y^*, \\ c^* &= (1-0,1) = 0,9, \end{aligned}$$

e, quindi, l'investimento di stato stazionario i^* è:

$$i^* = y^* - c^* = 1 - 0,9 = 0,1.$$

h. Supponete ora che il tasso di risparmio raddoppi (a parità di tutto il resto). Cosa succede al prodotto per addetto di stato stazionario? E al consumo per addetto?

Se s raddoppia ($s = 0,2$), a parità di tutte le altre grandezze, i nuovi valori del capitale per addetto, del prodotto per addetto, del consumo per addetto e dell'investimento per addetto di stato stazionario sono:

$$\begin{aligned} k^* &= (\frac{s}{\delta})^{\frac{4}{3}} = (\frac{0,2}{0,1})^{\frac{4}{3}} = 2,52, \\ y^* &= (\frac{s}{\delta})^{\frac{1}{3}} = (\frac{0,2}{0,1})^{\frac{1}{3}} = 1,26, \\ c^* &= (1-0,2) \times 1,26 = 1,008, \\ i^* &= y^* - c^* = 1,26 - 1,008 = 0,252. \end{aligned}$$

Osserviamo che, il tasso di risparmio non ha alcun effetto sul tasso di crescita di lungo periodo del prodotto e del capitale per addetto, che, in assenza di crescita della popolazione ed in assenza di progresso tecnologico, è zero. Infatti, il tasso di risparmio determina il livello del prodotto pro-capite di stato stazionario, ma non il suo tasso di crescita. Un maggior tasso di risparmio non può sostenere, in modo permanente, un maggior tasso di crescita della produzione, può, invece, solo sostenere un maggior livello di produzione, come i risultati dell'esercizio dimostrano.

Ricordate che, in stato stazionario il prodotto per addetto ed il capitale per addetto sono costanti, ovvero il loro tasso di crescita è zero.

$$\begin{aligned} K/L &\rightarrow \text{costante}, \\ Y/L &\rightarrow \text{costante}, \\ & \quad L \text{ cresce al tasso zero}, \\ & \quad K \text{ ed } Y \text{ crescono al tasso zero}. \end{aligned}$$

Per tale ragione, come osservato, il tasso di risparmio determina solo il livello di capitale e prodotto per addetto di lungo periodo, ovvero di stato stazionario: *un aumento del tasso di risparmio porta ad una crescita maggiore* *per un certo periodo, ma non per sempre, solo fino al raggiungimento del nuovo stato stazionario in cui i valori di capitale per addetto e di prodotto per addetto risulteranno maggiori di quelli dello stato stazionario di partenza.*

Nel nostro esercizio, in particolare, l'aumento di s provoca, non solo un aumento di y, di k e di i nel nuovo stato stazionario rispetto a quello di partenza, ma anche un aumento di c. Per una rappresentazione grafica dell'equilibrio di stato stazionario dopo un aumento di s si veda la Fig. A .

L'iniziale aumento di s provoca, dapprima, una immediata riduzione dei consumi ed un equivalente aumento dell'investimento; a lungo andare, il maggior investimento fa crescere lo stock di capitale per addetto, e questo comporta un progressivo aumento di y, di i e di c. Alla fine c, nel nuovo stato stazionario, risulta maggiore di quello che si aveva prima dell'aumento di s $(1,008 > 0,9)$. Questo risultato ci consente di osservare che, prima dell'aumento di s il capitale per addetto di stato stazionario non era quello di regola aurea, ma era sicuramente ad un livello inferiore rispetto a quello che avrebbe garantito la massimizzazione del consumo di stato stazionario (l'aumento di s sta facendo avvicinare l'economia ai livelli di k e c di stato stazionario di golden rule).

Per stabilire se una economia si trovi o meno al livello di capitale di regola aurea, si deve prima trovare il livello di consumo pro-capite in stato stazionario. Si parta dalla:

$$\begin{aligned} y &= c + i, \\ c &= y - i. \end{aligned}$$

Ricordiamo che in stato stazionario:

$$i^* = \delta k^*,$$

da cui, possiamo scrivere nella $c = y - i$ sostituendo ad y l'espressione $f(k^*)$ e ad i l'espressione δk^*:

$$c^* = f(k^*) - \delta k^*.$$

Questa equazione mostra che, un aumento del capitale per addetto di stato stazionario ha due effetti contrastanti sul consumo per addetto di stato stazionario, e di ciò si deve tenere conto quando si confrontano diversi stati stazionari:

i. All'aumentare di k^* il prodotto y^* aumenta.

ii. All'aumentare di k^* l'ammortamento δk^* aumenta.

Quindi, se un aumento di k^* provoca un aumento del consumo c^*, significa che l'aumento di $f(k^*)$ eccede l'aumento di δk^* e la variazione di c^* è positiva (Δ $c^* > 0$). Se, invece, un aumento di k^* provoca una riduzione di c^*, significa che l'aumento di $f(k^*)$ è inferiore all'aumento di δk^* è la variazione di c^* è negativa (Δ $c^* < 0$). Solo se l'aumento di k^* non provoca variazioni del consumo c^*, significa che il capitale per addetto di stato stazionario considerato massimizza il consumo per addetto di stato stazionario. In questo caso, infatti, l'aumento di $f(k^*)$ è identico all'aumento di δk^* e la variazione di c^* è nulla ($\Delta\ c^* = 0$).

La condizione di equilibrio di regola aurea è, quindi:

$$\begin{aligned}\Delta c^* &= \Delta f(k^*) - \Delta\delta k^* = 0,\\ \Delta f(k^*) &= \Delta\delta k^*.\end{aligned}$$

Ora, si noti che:

$$\begin{aligned}\Delta f(k^*) &= \frac{df(k^*)}{dk^*}\Delta k^* = PMG_{k^*}\Delta k^*,\\ \Delta\delta k^* &= \frac{d\delta k^*}{dk^*}\Delta k^* = \delta\Delta k^*.\end{aligned}$$

Sostituendo:

$$\begin{aligned}PMG_{k^*}\Delta k^* &= \delta\Delta k^*,\\ PMG_{k^*} &= \delta.\end{aligned}$$

La produttività marginale del capitale per addetto altro non è che l'inclinazione della funzione di produzione per addetto in un punto, mentre il tasso di ammortamento altro non è che l'inclinazione della retta di ammortamento. La condizione per trovare k^* di golden rule è, quindi, quella di imporre che in k^* funzione di produzione per addetto e retta di deprezzamento abbiano la medesima inclinazione. Ciò accade per quel valore di k^* tale per cui la parallella alla retta δk^* è tangente alla funzione di produzione per addetto $f(k^*)$ Tale valore di k^* è proprio quello di golden rule (k^*_{gold}) e la distanza fra le due curve, δk^* e $f(k^*)$, ovvero c^*_{gold}, è massima. Per cui, tale valore di c^* è proprio quello di regola aurea (c^*_{gold}).

Da un punto di vista algebrico, nel nostro esercizio si ha:

$$\begin{aligned}PMG_{k^*} &= \delta,\\ \frac{dk^{*\frac{1}{4}}}{dk^*} &= \frac{1}{4}k^{*-\frac{3}{4}} = \delta,\\ \frac{1}{4}\left[(\frac{s}{\delta})^{\frac{4}{3}}\right]^{-\frac{3}{4}} &= \delta,\\ \frac{1}{4}(\frac{s}{\delta})^{-1} &= \delta,\\ \frac{1}{4}(\frac{\delta}{s}) &= \delta,\\ s_{gold} &= \frac{1}{4} = 0,25.\end{aligned}$$

Dunque, se il tasso di risparmio di questa economia fosse pari al 25%, il consumo per addetto di stato stazionario sarebbe massimo. Per tassi di risparmio inferiori o superiori ad s_{gold} il consumo per addetto di stato stazionario è sicuramente inferiore a quello di golden rule. Nel nostro esercizio, quando $s = 0,2$ (ed anche quando $s = 0,1$) il tasso di risparmio è inferiore a quello che garantirebbe la massimizzazione del consumo ($s_{gold} = 0,25$). Ovvero, nei corrispondenti stati stazionari $PMG_{k^*} > \delta$, cioè la funzione di produzione è più inclinata della retta di mantenimento del capitale per addetto. Poco a poco che s si avvicina ad s_{gold}, k si avvicina a k^*_{gold} ed il consumo cresce negli stati stazionari che si susseguono, mentre l'inclinazione della funzione di produzione si riduce avvicinandosi all'inclinazione della retta δk.

Si noti anche che se, sempre nell'ipotesi che $s = 0,1$ non fosse il tasso di risparmio di golden rule, passando dalla stato stazionario con $s = 0,1$ a quello con $s = 0,2$ avessimo trovato che il consumo pro-capite di stato stazionario si riduceva, anzichè crescere, ciò avrebbe voluto dire che l'economia partiva da un livello di s e, quindi, di k di stato stazionario superiore (invece che inferiore, come nel nostro esempio) a quello che avrebbe garantito la massimizzazione del consumo Aumenti di s, in questo caso avrebbero comportato la riduzione di c nei successivi stati stazionari (l'economia si sarebbe allontanata sempre più dallo stato stazionario di regola aurea) e la pendenza della funzione di produzione sarebbe stata inferiore alla pendenza della retta di mantenimento del capitale per addetto. In un caso simile, per raggiungere lo stato stazionario di regola aurea sarebbe stata necessaria la riduzione di s e non il suo aumento (si veda la Fig. B).

Se il tasso di risparmio è inferiore a quello di regola aurea, le autorità possono intervenire promuovendone un suo aumento. Questa manovra, però, ha come effetto immediato quello di una momentanea caduta del consumo, che solo nel corso del tempo tende ad aumentare raggiungendo nuovamente e poi superando il suo livello di partenza, verso il suo livello massimo. Tutto questo implica che, **il benessere dei consumatori della generazione attuale peggiora**, benché le generazioni future potranno beneficiare di un maggior livello di consumo. Ovvero, spostandoci da un tasso di risparmio che si trova al di sotto di quello di regola aurea, verso un nuovo tasso posto ad un livello superiore ad esso, peggioriamo la posizione di qualche agente economico (il consumatore attuale), a vantaggio della posizione di un altro agente economico (il consumatore futuro). Perciò, il tasso di risparmio iniziale viene detto **dinamicamente efficiente**, poiché modificandolo non è possibile ottenere un miglioramento paretiano, ovvero non è possibile migliorare la situazione di qualcuno, senza peggiorare quella di qualcun altro.

Al contrario, *quando il tasso di risparmio è superiore a quello di regola aurea*, per raggiungere la golden rule è necessario ridurlo. Questo genera, nell'immediato, un aumento dei consumi, ovvero un **miglioramento del benessere dei consumatori della generazione attuale, nonché un miglioramento dei consumi anche della generazione futura**. Perciò, il tasso di risparmio iniziale è definito **dinamicamente inefficiente**, dal momento che, modificandolo, è possibile ottenere un miglioramento paretiano (i consumatori attuali traggono un beneficio, e non vi è alcun danno per altri agenti economici, ovvero i consumatori futuri).

Il concetto di massimo consumo non va confuso con quello di efficienza paretiana.

Esercizio 2)

La funzione di produzione sia:

$$
\begin{aligned}
Y &= \sqrt{K} \times \sqrt{LE}, \\
Y &= K^{\frac{1}{2}} \times (LE)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta &= s = 0,10, \\
n &= 0,015, \\
g &= 0,035.
\end{aligned}
$$

Scriviamo tale equazione in termini di prodotto e capitale per lavoratore effettivo, ovvero dividiamo per $L \times E$:

$$\frac{Y}{LE} = y = \frac{K^{\frac{1}{2}} \times (LE)^{\frac{1}{2}}}{LE} = K^{\frac{1}{2}} \times (LE)^{-\frac{1}{2}} = (\frac{K}{LE})^{\frac{1}{2}} = k^{\frac{1}{2}}.$$

a. Calcolate i valori di stato stazionario di:
i. stock di capitale per unità di efficienza;
ii. prodotto per unità di efficienza;
iii. tasso di crescita del prodotto per unità di efficienza;
iiii. tasso di crescita del capitale per addetto.

i. Individuiamo l'espressione per k di stato stazionario (k^*):

$$
\begin{aligned}
sf(k) - (\delta + n + g)k &= 0, \\
sk^{\frac{1}{2}} &= (\delta + n + g)k, \\
\frac{k^{\frac{1}{2}}}{k} &= \frac{(\delta + n + g)}{s}, \\
k^{-\frac{1}{2}} &= (\frac{\delta + n + g}{s}), \\
k^* &= (\frac{s}{\delta + n + g})^2, \\
k^* &= (\frac{0,1}{0,1 + 0,015 + 0,035})^2 = 0,444.
\end{aligned}
$$

ii. A questo punto, per individuare l'espressione del livello di prodotto per lavoratore effettivo di stato stazionario (y^*) si deve sostituire k^* in y:

$$\begin{aligned} y^* &= k^{*\frac{1}{2}}, \\ y^* &= \left[\left(\frac{s}{\delta+n+g}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{s}{\delta+n+g}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{0,1}{0,1+0,015+0,035}\right)^{\frac{1}{4}} = 0,667, \end{aligned}$$

da cui si ricava anche che, il livello di consumo di stato stazionario c^* è:

$$\begin{aligned} c^* &= (1-s)y^*, \\ c^* &= (1-0,1)0,667 = 0,6. \end{aligned}$$

Punti iii, iiii.
Tassi di crescita in ss:

$$\begin{aligned} \frac{Y}{LE} &= y \longrightarrow \text{costante}, \\ \frac{K}{LE} &= k \longrightarrow \text{costante}, \\ LE &\longrightarrow \text{cresce al tasso } n+g, \\ & \quad\ K \text{ ed } Y \text{ crescono al tasso } n+g, \\ Y/L &\longrightarrow \text{cresce al tasso } n+g-n=g, \\ K/L &\longrightarrow \text{cresce al tasso } n+g-n=g. \end{aligned}$$

b. Come reagisce il tasso di crescita del capitale per addetto di stato stazionario se il governo attua con successo una politica di controllo delle nascite che porta il tasso di crescita della popolazione all'1% annuo?

Abbiamo appena visto che, il tasso di crescita del capitale per addetto, in stato stazionario, è pari al tasso di progresso tecnologico. Anche modificando la retta di mantenimento del capitale per lavoratore effettivo, attraverso una variazione di n, il tasso di crescita è determinato esogenamente da g.

c. Il tasso di risparmio corrente è dinamicamente inefficiente? Spiegate. Quale è il tasso che garantirebbe la massimizzazione del livello di consumo per addetto di stato stazionario? Qual è tale livello massimo di consumo? A che tasso crescerà in stato stazionario?

La condizione della regola aurea in presenza di crescita della popolazione e di progresso tecnologico richiede che:

$$\begin{aligned} \Delta c^* &= \Delta f(k^*) - \Delta(\delta+n+g)k^* = 0, \\ \Delta f(k^*) &= \Delta(\delta+n+g)k^*. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
PMG_{k^*} &= \delta + n + g, \\
\frac{dk^{*\frac{1}{2}}}{dk^*} &= \frac{1}{2}k^{*-\frac{1}{2}} = \delta + n + g, \\
\frac{1}{2}\left[(\frac{s}{\delta + n + g})^2\right]^{-\frac{1}{2}} &= \delta + n + g, \\
\frac{1}{2}(\frac{\delta + n + g}{s}) &= \delta + n + g, \\
s_{gold} &= \frac{1}{2} = 0,5.
\end{aligned}
$$

Il tasso di risparmio $s_{gold} = 0,5$ massimizza sia il consumo per lavoratore effettivo che il consumo per addetto. Poichè, nel nostro esercizio $s = 0,10 < s_{gold} = 0,5$, significa che il consumo non è massimo, sia in termini per addetto che in termini di lavoratore effettivo. Il tasso di risparmio corrente è troppo basso, rispetto a quello che garantisce il raggiungimento di stato stazionario di golden rule, ovvero, la produttività marginale del capitale per lavoratore effettivo valutata nello stato stazionario sopra indicato è superiore all'inclinazione della retta di mantenimento del capitale. L'economia parte da un livello di capitale per lavoratore effettivo, e per addetto, inferiore rispetto a quello che garantirebbe la massimizzazione del consumo. Il saggio di risparmio corrente è *dinamicamente efficiente*.

I valori di capitale, prodotto e consumo per lavoratore effettivo di golden rule sono:

$$
\begin{aligned}
k^*_{gold} &= (\frac{0,5}{0,1 + 0,015 + 0,035})^2 = 11,9, \\
y^*_{gold} &= \left[(\frac{0,5}{0,1 + 0,015 + 0,035})^2\right]^{\frac{1}{2}} = 11,9^{\frac{1}{2}} = 3,\bar{3}, \\
c^*_{gold} &= (1 - s) \times y^*_{gold} = (1 - 0,5) \times 11,9^{\frac{1}{2}} = 1,725.
\end{aligned}
$$

Poichè il consumo per lavoratore effettivo è:

$$c = \frac{C}{LE},$$

dove C è il consumo totale, si ha che il consumo per addetto è:

$$\frac{C}{L} = E \times c.$$

Quindi, il consumo per addetto di golden rule è:

$$(\frac{C}{L})^*_{gold} = Ec^*_{gold} = E \times 1,725.$$

Tassi di crescita in ss:

$$\begin{aligned}
\frac{C}{LE} &= c \longrightarrow \text{costante},\\
LE &\longrightarrow \text{cresce al tasso } n+g,\\
& \quad\; C \text{ cresce al tasso } n+g,\\
C/L &\longrightarrow \text{cresce al tasso } n+g-n=g.
\end{aligned}$$

Esercizio 3)

Si consideri la funzione di produzione:

$$Y = K^{\frac{2}{3}} \times L^{\frac{1}{3}}.$$

a. Verificate che la crescita percentuale del prodotto è dovuta al contributo dei due diversi fattori produttivi.

La variazione di Y è data dalla seguente:

$$\Delta Y = \frac{dY}{dK}\Delta K + \frac{dY}{dL}\Delta L,$$

dove:

$$\begin{aligned}
\frac{dY}{dK} &= \frac{2}{3}K^{-\frac{1}{3}} = PMG_K,\\
\frac{dY}{dL} &= \frac{1}{3}L^{-\frac{2}{3}} = PMG_L.
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\Delta Y = PMG_K \Delta K + PMG_L \Delta L.$$

Dividiamo tutto per Y, e scriviamo l'equazione appena vista come:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = (\frac{PMG_K \times K}{Y}) \times \frac{\Delta K}{K} + (\frac{PMG_L \times L}{Y}) \times \frac{\Delta L}{L}.$$

Ora, ricordiamo che:

$$\begin{aligned}
\frac{PMG_K \times K}{Y} &= \text{Quota di reddito che va al capitale} = \frac{2}{3},\\
\frac{PMG_L \times L}{Y} &= \text{Quota di reddito che va al lavoro} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{2}{3} \times \frac{\Delta K}{K} + \frac{1}{3} \times \frac{\Delta L}{L}.$$

La crescita percentuale del prodotto è dovuta al contributo di due diversi fattori: la crescita percentuale del fattore capitale, $\alpha \times \frac{\Delta K}{K}$, e la crescita percentuale del fattore lavoro, $(1-\alpha) \times \frac{\Delta L}{L}$, con $\alpha = 2/3$. Questa equazione illustra come procedere alla attribuzione della crescita a ciascuno dei fattori di produzione.

In questa analisi non abbiamo considerato il fatto che il progresso tecnologico influisce sulla quantità di output ottenibile, per date quantità di K ed L. Detto in altre parole, abbiamo ipotizzato implicitamente che non vi fiossero cambiamenti della funzione di produzione nel tempo. Per considerare gli effetti della tecnologia, dobbiamo scrivere la funzione di produzione come:

$$Y = AK^{\frac{2}{3}} \times L^{\frac{1}{3}},$$

dove $A > 0$, denominato produttività totale dei fattori, misura lo stato della tecnologia. L'introduzione del progresso tecnologico introduce un nuovo termine alla equazione di contabilità della crescita economica:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta A}{A} + \alpha \times \frac{\Delta K}{K} + (1-\alpha) \times \frac{\Delta L}{L}.$$

La crescita percentuale del prodotto è dovuta ora al contributo di tre diversi fattori: la crescita percentuale della produttività totale dei fattori, $\frac{\Delta A}{A}$, la crescita percentuale del fattore capitale, $\alpha \times \frac{\Delta K}{K}$, e la crescita percentuale del fattore lavoro, $(1-\alpha) \times \frac{\Delta L}{L}$.

b.Un aumento del fattore produttivo lavoro del 5% che effetto ha sul prodotto aggregato?

Se la forza lavoro aumenta del 5%, ($\Delta L/L = 5\%$), fermi rimanendo la tecnologia e la quantità di capitale, si ha:

$$\begin{aligned} \Delta A/A &= 0\%, \\ \Delta K/K &= 0\%, \\ \Delta L/L &= 5\%. \end{aligned}$$

Da cui:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = 0\% + \frac{2}{3} \times 0\% + \frac{1}{3} \times 5\% = 1,67\%.$$

Un aumento del fattore produttivo lavoro del 5% fa aumentare il prodotto aggregato dell'$1,67\%$.

c. Calcolate la produttività totale dei fattori (la quota della crescita del prodotto che rimane dopo aver preso in considerazione le determinanti misurabili della crescita ovvero il residuo di Solow):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Y}{Y} &= \frac{\Delta A}{A} + \alpha \times \frac{\Delta K}{K} + (1-\alpha) \times \frac{\Delta L}{L}, \\ \frac{\Delta A}{A} &= \frac{\Delta Y}{Y} - \alpha \times \frac{\Delta K}{K} - (1-\alpha) \times \frac{\Delta L}{L}. \end{aligned}$$

Sostituendo a $\frac{\Delta Y}{Y} = 1,67\%$ e a $(1-\alpha) \times \frac{\Delta L}{L} = 1/3 \times 5\%$, tenendo conto che $\frac{\Delta K}{K} = 0\%$, si ha:

$$\frac{\Delta A}{A} = 1,67\% - 1,67\% = 0\%.$$

In questo caso non si ha cambiamento tecnologico, per cui la crescita del prodotto nella sua interezza è attribuibile esclusivamente alla crescita del fattore di produzione.lavoro Di conseguenza la crescita della produttività totale dei fattori è nulla.

d. **Tra l'anno uno e l'anno due, lo stock di capitale passa da 6 unità a 7, il fattore lavoro da 3 unità a 4 e il prodotto da 12 unità a 6.**

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta Y}{Y} &= \frac{14-12}{12} = \frac{1}{6}, \\
\frac{\Delta K}{K} &= \frac{7-6}{6} = \frac{1}{6}, \\
\frac{\Delta L}{L} &= \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Si calcoli il residuo di Solow.

Sappiamo che la crescita della produttività totale dei fattori è data da:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta Y}{Y} - \alpha \times \frac{\Delta K}{K} - (1-\alpha) \times \frac{\Delta L}{L}.$$

Sostituendo i valori indicati e ponendo $\alpha = \frac{2}{3}$, otteniamo:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{18} = -0,056.$$

La produttività totale si riduce del $5,6\%$.

Esercizio 4)

Si consideri il modello di Solow. Si assuma che:

$$\begin{aligned}
Y &= AK^{\frac{1}{3}} \times (LE)^{\frac{2}{3}}, \\
A &= 1, \\
s &= 0,07, \\
\delta &= 0,2, \\
n &= 0,03, \\
g &= 0,05.
\end{aligned}$$

Determinare:

a. I valori di stato stazionario di capitale per unità di efficienza e consumo per unità di efficienza.

b. Il tasso di crescita del prodotto per unità di efficienza, il tasso di crescita del capitale pro-capite e il tasso di crescita del consumo aggregato.

c. Trovare il tasso di risparmio di regola aurea e spiegare se il tasso iniziale sia dinamicamente efficiente od inefficiente.

a.

La funzione di produzione in oggetto è che una funzione di produzione Cobb-Douglas, in cui la somma degli esponenti è pari ad 1:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Ciò implica rendimenti di scala costanti.

Proprio perchè la funzione di produzione presenta rendimenti di scala costanti, è possibile dividere il membro di sinistra della funzione stessa e quello di destra per LE, ottenendo, in tal modo, una espressione in termini per unità di efficienza della funzione di produzione:

$$\begin{aligned}
Y &= K^{\frac{1}{3}} \times (LE)^{\frac{2}{3}}, \\
\frac{Y}{LE} &= y = K^{\frac{1}{3}} \times \frac{(LE)^{\frac{2}{3}}}{LE} = K^{\frac{1}{3}} \times (LE)^{-\frac{1}{3}}, \\
y &= \frac{K^{\frac{1}{3}}}{(LE)^{\frac{1}{3}}} = (\frac{K}{LE})^{\frac{1}{3}} = k^{\frac{1}{3}} = f(k).
\end{aligned}$$

In stato stazionario, la variazione dello stock di capitale pro-capite (Δk) è nulla:

$$\begin{aligned}
\Delta k &= i - (\delta + n + g)k = 0, \\
\Delta k &= sf(k) - (\delta + n + g)k = 0.
\end{aligned}$$

Per individuare, quindi, l'espressione per k di stato stazionario (k^*) basta imporre:

$$
\begin{aligned}
sf(k) - (\delta + n + g)k &= 0, \\
sk^{\frac{1}{3}} &= (\delta + n + g)k, \\
\frac{k^{\frac{1}{3}}}{k} &= \frac{(\delta + n + g)}{s}, \\
k^{-\frac{2}{3}} &= \frac{(\delta + n + g)}{s}, \\
\left(k^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}} &= \left(\frac{\delta + n + g}{s}\right)^{-\frac{3}{2}}, \\
k^* &= \left(\frac{s}{\delta + n + g}\right)^{\frac{3}{2}}, \\
k^* &= \left(\frac{0,07}{0,2 + 0,03 + 0,05}\right)^{\frac{3}{2}} = \\
k^* &= \sqrt[2]{0,25^3} = 0,125.
\end{aligned}
$$

A questo punto, per individuare il consumo per unità di efficienza di stato stazionario, è necessario trovare il prodotto per unità di efficienza di stato stazionario:

$$
\begin{aligned}
y^* &= k^{*\frac{1}{3}}, \\
y^* &= \left[\left(\frac{s}{\delta + n + g}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} = 0,5,
\end{aligned}
$$

da cui si ricava anche che, il livello di consumo di stato stazionario c^* è:

$$
\begin{aligned}
c^* &= (1 - s)y^*, \\
c^* &= (1 - 0,07) \times 0,5 = 0,465.
\end{aligned}
$$

b.

$$
\begin{aligned}
\frac{Y}{LE} &\implies \text{cresce al tasso zero,} \\
\frac{K}{L} &\implies \text{cresce al tasso } g, \\
C &\implies \text{cresce al tasso } n + g.
\end{aligned}
$$

c.
La condizione di stato stazionario di regola aurea è:

$$
\begin{aligned}
PMG_{k^*} &= \delta + n + g, \\
\frac{dk^{*\frac{1}{3}}}{dk^*} &= \frac{1}{3}k^{*-\frac{2}{3}}, \\
\frac{1}{3}\left[\left(\frac{s}{\delta+n+g}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{-\frac{2}{3}} &= \delta + n + g, \\
\frac{1}{3}(\frac{s}{\delta+n+g})^{-1} &= \delta + n + g, \\
\frac{1}{3}(\frac{\delta+n+g}{s}) &= \delta + n + g, \\
s_{gold} &= \frac{1}{3} = 0,\bar{3}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_{gold} &= 0,\bar{3} > 0,07 = s, \\
& \quad s \text{ è dinamicamente efficiente.}
\end{aligned}
$$

Esercizio 5)

Si consideri il modello di Solow. Si assuma che:

$$
\begin{aligned}
Y &= AK^{\frac{2}{4}} \times (LE)^{\frac{1}{2}}, \\
A &= 1, \\
s &= 0,36, \\
\delta &= 0,08, \\
n &= 0,01, \\
g &= 0,03.
\end{aligned}
$$

Determinare:

a. I valori di stato stazionario di capitale per unità di efficienza e consumo per unità di efficienza.

b. Il tasso di crescita del prodotto per unità di efficienza, il tasso di crescita del capitale pro-capite e il tasso di crescita del consumo aggregato.

c. Trovare il tasso di risparmio di regola aurea e spiegare se il tasso iniziale sia dinamicamente efficiente od inefficiente.

a.

La funzione di produzione in oggetto è che una funzione di produzione Cobb-Douglas, in cui la somma degli esponenti è pari ad 1:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Ciò implica rendimenti di scala costanti.

Proprio perchè la funzione di produzione presenta rendimenti di scala costanti, è possibile dividere il membro di sinistra della funzione stessa e quello di destra per LE, ottenendo, in tal modo, una espressione in termini per unità di efficienza della funzione di produzione:

$$\begin{aligned} Y &= K^{\frac{1}{2}} \times (LE)^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{Y}{LE} &= y = K^{\frac{1}{2}} \times \frac{(LE)^{\frac{1}{2}}}{LE} = K^{\frac{1}{2}} \times (LE)^{-\frac{1}{2}}, \\ y &= \frac{K^{\frac{1}{2}}}{(LE)^{\frac{1}{2}}} = (\frac{K}{LE})^{\frac{1}{2}} = k^{\frac{1}{2}} = f(k). \end{aligned}$$

In stato stazionario, la variazione dello stock di capitale pro-capite (Δk) è nulla:

$$\begin{aligned} \Delta k &= i - (\delta + n + g)k = 0, \\ \Delta k &= sf(k) - (\delta + n + g)k = 0. \end{aligned}$$

Per individuare, quindi, l'espressione per k di stato stazionario (k^*) basta imporre:

$$\begin{aligned} sf(k) - (\delta + n + g)k &= 0, \\ sk^{\frac{1}{2}} &= (\delta + n + g)k, \\ \frac{k^{\frac{1}{2}}}{k} &= \frac{(\delta + n + g)}{s}, \\ k^{-\frac{1}{2}} &= \frac{(\delta + n + g)}{s}, \\ \left(k^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} &= \left(\frac{\delta + n + g}{s}\right)^{-2}, \\ k^* &= \left(\frac{s}{\delta + n + g}\right)^2, \\ k^* &= \left(\frac{0,36}{0,08 + 0,03 + 0,01}\right)^2 = \\ k^* &= 9. \end{aligned}$$

A questo punto, per individuare il consumo per unità di efficienza di stato stazionario, è necessario trovare il prodotto per unità di efficienza di stato stazionario:

$$\begin{aligned} y^* &= k^{*\frac{1}{2}}, \\ y^* &= \left[(\frac{s}{\delta + n + g})^2\right]^{\frac{1}{2}} = 3, \end{aligned}$$

da cui si ricava anche che, il livello di consumo di stato stazionario c^* è:

$$\begin{aligned} c^* &= (1-s)y^*, \\ c^* &= (1-0,36)\times 3 = 1,92. \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \frac{Y}{LE} &\Longrightarrow \text{cresce al tasso zero,} \\ \frac{K}{L} &\Longrightarrow \text{cresce al tasso } g, \\ C &\Longrightarrow \text{cresce al tasso } n+g. \end{aligned}$$

c.
La condizione di stato stazionario di regola aurea è:

$$\begin{aligned} PMG_{k^*} &= \delta+n+g, \\ \frac{dk^{*\frac{1}{2}}}{dk^*} &= \frac{1}{2}k^{*-\frac{1}{2}}, \\ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{s}{\delta+n+g}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} &= \delta+n+g, \\ \frac{1}{2}(\frac{s}{\delta+n+g})^{-1} &= \delta+n+g, \\ \frac{1}{2}(\frac{\delta+n+g}{s}) &= \delta+n+g, \\ s_{gold} &= \frac{1}{2} = 0,5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{gold} &= 0,5 > 0,36 = s, \\ & \quad s \text{ è dinamicamente efficiente.} \end{aligned}$$

Esercizio 6)

Si consideri il modello di Solow. Si assuma che:

$$\begin{aligned} Y &= AK^{\frac{2}{4}} \times (LE)^{\frac{1}{2}}, \\ A &= 10, \\ s &= 0,36, \\ \delta &= 0,06, \\ n &= 0,02, \\ g &= 0,04. \end{aligned}$$

Determinare:

a. I valori di stato stazionario di capitale per unità di efficienza e consumo per unità di efficienza.

b. Il tasso di crescita del prodotto per unità di efficienza, il tasso di crescita del capitale pro-capite e il tasso di crescita del consumo aggregato.

c. Trovare il tasso di risparmio di regola aurea e spiegare se il tasso iniziale sia dinamicamente efficiente od inefficiente.

a.

La funzione di produzione in oggetto è che una funzione di produzione Cobb-Douglas, in cui la somma degli esponenti è pari ad 1:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Ciò implica rendimenti di scala costanti.

Proprio perchè la funzione di produzione presenta rendimenti di scala costanti, è possibile dividere il membro di sinistra della funzione stessa e quello di destra per LE, ottenendo, in tal modo, una espressione in termini per unità di efficienza della funzione di produzione:

$$\begin{aligned}
Y &= AK^{\frac{1}{2}} \times (LE)^{\frac{1}{2}}, \\
\frac{Y}{LE} &= y = AK^{\frac{1}{2}} \times \frac{(LE)^{\frac{1}{2}}}{LE} = AK^{\frac{1}{2}} \times (LE)^{-\frac{1}{2}}, \\
y &= A\frac{K^{\frac{1}{2}}}{(LE)^{\frac{1}{2}}} = A(\frac{K}{LE})^{\frac{1}{2}} = Ak^{\frac{1}{2}} = f(k).
\end{aligned}$$

In stato stazionario, la variazione dello stock di capitale pro-capite (Δk) è nulla:

$$\begin{aligned}
\Delta k &= i - (\delta + n + g)k = 0, \\
\Delta k &= sf(k) - (\delta + n + g)k = 0.
\end{aligned}$$

Per individuare, quindi, l'espressione per k di stato stazionario (k^*) basta imporre:

$$
\begin{aligned}
sf(k) - (\delta + n + g)k &= 0, \\
sAk^{\frac{1}{2}} &= (\delta + n + g)k, \\
\frac{k^{\frac{1}{2}}}{k} &= \frac{(\delta + n + g)}{sA}, \\
k^{-\frac{1}{2}} &= \frac{(\delta + n + g)}{sA}, \\
\left(k^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2} &= \left(\frac{\delta + n + g}{sA}\right)^{-2}, \\
k^* &= \left(\frac{sA}{\delta + n + g}\right)^{2}, \\
k^* &= \left(\frac{10 \times 0,36}{0,08 + 0,03 + 0,01}\right)^{2} = \\
k^* &= 900.
\end{aligned}
$$

A questo punto, per individuare il consumo per unità di efficienza di stato stazionario, è necessario trovare il prodotto per unità di efficienza di stato stazionario.

$$
\begin{aligned}
y^* &= Ak^{*\frac{1}{2}}, \\
y^* &= \left[(\frac{As}{\delta + n + g})^2\right]^{\frac{1}{2}} = 300,
\end{aligned}
$$

da cui si ricava anche che, il livello di consumo di stato stazionario c^* è:

$$
\begin{aligned}
c^* &= (1 - s)y^*, \\
c^* &= (1 - 0,36) \times 300 = 192.
\end{aligned}
$$

b.

$$
\begin{aligned}
\frac{Y}{LE} &\Longrightarrow \text{cresce al tasso zero,} \\
\frac{K}{L} &\Longrightarrow \text{cresce al tasso } g, \\
C &\Longrightarrow \text{cresce al tasso } n + g.
\end{aligned}
$$

c.
La condizione di stato stazionario di regola aurea è:

$$\begin{aligned}
PMG_{k^*} &= \delta + n + g, \\
\frac{dk^{*\frac{1}{2}}}{dk^*} &= \frac{1}{2}Ak^{*-\frac{1}{2}}, \\
\frac{1}{2}A\left[\left(\frac{sA}{\delta+n+g}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} &= \delta + n + g, \\
\frac{1}{2}A(\frac{sA}{\delta+n+g})^{-1} &= \delta + n + g, \\
\frac{1}{2}A(\frac{\delta+n+g}{sA}) &= \delta + n + g, \\
s_{gold} &= \frac{1}{2} = 0,5.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{gold} &= 0,5 > 0,36 = s, \\
& \quad s \text{ è dinamicamente efficiente.}
\end{aligned}$$

Esercizio 7)

Si consideri il modello di Solow. Si assuma che:

$$\begin{aligned}
Y &= AK^{\frac{1}{3}} \times (LE)^{\frac{2}{3}}, \\
A &= 4, \\
s &= 0,07, \\
\delta &= 0,15, \\
n &= 0,05, \\
g &= 0,08.
\end{aligned}$$

Determinare:

a. I valori di stato stazionario di capitale per unità di efficienza e consumo per unità di efficienza.

b. Il tasso di crescita del prodotto per unità di efficienza, il tasso di crescita del capitale pro-capite e il tasso di crescita del consumo aggregato.

c. Trovare il tasso di risparmio di regola aurea e spiegare se il tasso iniziale sia dinamicamente efficiente od inefficiente.

a.

La funzione di produzione in oggetto è che una funzione di produzione Cobb-Douglas, in cui la somma degli esponenti è pari ad 1:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Ciò implica rendimenti di scala costanti.

Proprio perchè la funzione di produzione presenta rendimenti di scala costanti, è possibile dividere il membro di sinistra della funzione stessa e quello di destra per LE, ottenendo, in tal modo, una espressione in termini per unità di efficienza della funzione di produzione:

$$\begin{aligned}
Y &= AK^{\frac{1}{3}} \times (LE)^{\frac{2}{3}}, \\
\frac{Y}{LE} &= y = AK^{\frac{1}{3}} \times \frac{(LE)^{\frac{2}{3}}}{LE} = AK^{\frac{1}{3}} \times (LE)^{-\frac{1}{3}}, \\
y &= A\frac{K^{\frac{1}{3}}}{(LE)^{\frac{1}{3}}} = A(\frac{K}{LE})^{\frac{1}{3}} = Ak^{\frac{1}{3}} = f(k).
\end{aligned}$$

In stato stazionario, la variazione dello stock di capitale pro-capite (Δk) è nulla:

$$\begin{aligned}
\Delta k &= i - (\delta + n + g)k = 0, \\
\Delta k &= sf(k) - (\delta + n + g)k = 0.
\end{aligned}$$

Per individuare, quindi, l'espressione per k di stato stazionario (k^*) basta imporre:

$$\begin{aligned}
sf(k) - (\delta + n + g)k &= 0, \\
sAk^{\frac{1}{3}} &= (\delta + n + g)k, \\
\frac{k^{\frac{1}{3}}}{k} &= \frac{(\delta + n + g)}{sA}, \\
k^{-\frac{2}{3}} &= \frac{(\delta + n + g)}{sA}, \\
\left(k^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}} &= \left(\frac{\delta + n + g}{sA}\right)^{-\frac{3}{2}}, \\
k^* &= \left(\frac{sA}{\delta + n + g}\right)^{\frac{3}{2}}, \\
k^* &= \left(\frac{0,07 \times 4}{0,2 + 0,03 + 0,05}\right)^{\frac{3}{2}} = \\
k^* &= 1.
\end{aligned}$$

A questo punto, per individuare il consumo per unità di efficienza di stato stazionario, è necessario trovare il prodotto per unità di efficienza di stato stazionario:

$$\begin{aligned}
y^* &= Ak^{*\frac{1}{3}}, \\
y^* &= \left[(\frac{sA}{\delta + n + g})^{\frac{3}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} = 4,
\end{aligned}$$

da cui si ricava anche che, il livello di consumo di stato stazionario c^* è:

$$\begin{aligned} c^* &= (1-s)y^*, \\ c^* &= (1-0,07) \times 4 = 3,72. \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \frac{Y}{LE} &\Longrightarrow \text{cresce al tasso zero}, \\ \frac{K}{L} &\Longrightarrow \text{cresce al tasso } g, \\ C &\Longrightarrow \text{cresce al tasso } n+g. \end{aligned}$$

c.
La condizione di stato stazionario di regola aurea è:

$$\begin{aligned} PMG_{k^*} &= \delta + n + g, \\ \frac{dk^{*\frac{1}{3}}}{dk^*} &= \frac{1}{3}Ak^{*-\frac{2}{3}}, \\ \frac{1}{3}A\left[\left(\frac{sA}{\delta+n+g}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^{-\frac{2}{3}} &= \delta + n + g, \\ \frac{1}{3}A(\frac{sA}{\delta+n+g})^{-1} &= \delta + n + g, \\ \frac{1A}{3}(\frac{\delta+n+g}{sA}) &= \delta + n + g, \\ s_{gold} &= \frac{1}{3} = 0,\bar{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{gold} &= 0,\bar{3} > 0,07 = s, \\ & s \text{ è dinamicamente efficiente}. \end{aligned}$$

NB:
Cosa sarebbe accaduto se le funzioni di produzione fossero state le seguenti:

$$
\begin{aligned}
Y &= AK^{\frac{1}{3}} \times (LE)^{\frac{1}{3}}, \\
Y &= AK^{\frac{1}{4}} \times (LE)^{\frac{1}{2}}, \\
Y &= AK^{\frac{3}{4}} \times (LE)^{\frac{1}{2}}, \\
\frac{1}{3} + \frac{1}{3} &= \frac{2}{3} < 1, \\
\frac{1}{4} + \frac{1}{2} &= \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4} < 1, \\
\frac{3}{4} + \frac{1}{2} &= \frac{3+2}{4} = \frac{5}{4} > 1.
\end{aligned}
$$