Esercizio di approfondimento sul modello di Solow

Dott.ssa G. Nunziante
giulia.nunziante@uniroma2.it

Esercizio 1.

1. $F(\lambda K, \lambda L) = \sqrt{\lambda K}\sqrt{\lambda L} = \lambda F(K, L)$

   $MPL = \frac{\delta Y}{\delta L} = \frac{1}{2}\frac{Y}{L}$
   $MPK = \frac{\delta Y}{\delta K} = \frac{1}{2}\frac{Y}{K}$

2. e 3.
   $costo\ di\ L\ unità\ di\ lavoro = L * P * MPL = \frac{1}{2}PY$
   $costo\ di\ K\ unità\ di\ capitale = K * P * MPK = \frac{1}{2}PY$
   $\boldsymbol{Profitto = PY - L * P * MPL - K * P * MPK = 0}$

4. $\boldsymbol{y = \sqrt{k}}$

6. **k_A* = 4; y_A* = 2; sy_A* = 0,2; cy_A* = 1,8**
   k_B* = 16; y_B* = 4; sy_B* = 0,8; cy_B* = 3,2

7. **In stato stazionario, $\boldsymbol{\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta y}{y} = 0\ e\ \frac{\Delta Y}{Y} = n = 0,01}$**

8. Per completare la tabella si ricorda che:

   $y_0 = \sqrt{k_0}$;
   $\text{risparmio nell'anno } 0 = s * y_0$;
   $\text{consumo nell'anno } 0 = y_0 - s * y_0$;
   $k_1 = k_0 + s * y_0 - (\delta + n) * k_0$;
   $y_1 = \sqrt{k_1}$;
   $\text{risparmio nell'anno } 1 = s * y_1$;
   $\text{consumo nell'anno } 1 = y_1 - s * y_1$;
   $\frac{dy}{y}\ nell'anno1 = \frac{y_1 - y_0}{y_0}$;
   $\frac{dk}{k}\ nell'anno1 = \frac{k_1 - k_0}{k_0}$;
   …

	Paese A						Paese B					
	y	k	c(y)	sy	dy/y	dk/k	y	k	c(y)	sy	dy/y	dk/k
Anno 0	1.73	3.00	1.56	0.17			4.24	18.00	3.39	0.85		

Anno 1	1.74	3.02	1.56	0.17	0.39%	0.77%	4.24	17.95	3.39	0.85	-0.14%	-0.29%
Anno 2	1.75	3.05	1.57	0.17	0.37%	0.75%	4.23	17.90	3.38	0.85	-0.14%	-0.28%
Anno 3	1.75	3.07	1.58	0.18	0.36%	0.73%	4.22	17.85	3.38	0.84	-0.14%	-0.27%
Anno 4	1.76	3.09	1.58	0.18	0.35%	0.71%	4.22	17.80	3.38	0.84	-0.13%	-0.27%

Mc 1d, 2c, 3b, 4a, 6c, 7d

Multiple choice

1c, 2c

Esercizio 2.

1. k^* = 0,444; y^* = 0,667; sy^* = 0,067; cy^* = 0,6; $\frac{\Delta k}{k} = 0$; $\frac{\Delta y}{y} = 0$; $\frac{\Delta Y/L}{Y/L} = 0{,}035$; $\frac{\Delta Y}{Y} = 0{,}05$
2. k_g^* = 11,111; y_g^* = 3,333; s_g = 0,5 ;sy_g^* = 1,667; cy_g^* = 1,667;
   $\frac{\Delta k}{k} = 0$; $\frac{\Delta y}{y} = 0$; $\frac{\Delta Y/L}{Y/L} = 0{,}035$; $\frac{\Delta Y}{Y} = 0{,}05$

Mc 1d, 2d, 3b

Soluzioni per una funzione di produzione $Y = K^{1/3L\ 2/3}$ (dove K rappresenta il capitale e L il lavoro), in presenza di crescita della popolazione (n) e deprezzamento del capitale (δ).

1. Rendimenti di scala costanti

$$F(\lambda K, \lambda L) = (\lambda K)^{1/3}(\lambda L)^{2/3} = \lambda^{1/3}K^{1/3}\lambda^{2/3}L^{2/3} = \lambda K^{1/3}L^{2/3} = \lambda F(K, L)$$

2. Forma intensiva

$$\frac{Y}{L} = \frac{K^{1/3}L^{2/3}}{L} = \frac{K^{1/3}}{L^{1-2/3}} = \frac{K^{1/3}}{L^{1/3}} = \left(\frac{K}{L}\right)^{1/3}$$

Ponendo

$y = \frac{Y}{L}$ e $k = \frac{K}{L}$

La funzione di produzione in forma intensiva diventa:

$$y = k^{1/3}$$

3. Stato stazionario

$$sy = (\delta + n)k$$

$$sk^{1/3} = (\delta + n)k$$

$$\frac{k}{k^{1/3}} = \frac{s}{(\delta + n)}$$

$$k^{2/3} = \frac{s}{(\delta + n)}$$

Valori di stato stazionario:

$k *= \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{3/2}$; $y *= (\mathrm{k}*)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{1/2}$; $sy *= \mathrm{s}\left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{s^{3/2}}{(\delta+\mathrm{n})^{1/2}}$; $cy *= (1-s)y *$; $\frac{\Delta k}{k} = 0$; $\frac{\Delta y}{y} = 0$; $\frac{\Delta Y}{Y} = \mathrm{n}$

4. Regola aurea

$\mathrm{PMk} = (\delta + n)$

$$\mathrm{PMk} = \frac{\delta y}{\delta k} = \frac{1}{3}k^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{k^{2/3}} = \delta + n$$

Per cui:

$$k^{2/3} = \frac{1}{3(\delta + n)}$$

Valori di regola aurea:

$k_g = \left(\frac{1}{3(\delta+n)}\right)^{3/2}$; $y_g = \left(k_g\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3(\delta+n)}\right)^{1/2}$; $s_g = \frac{(\delta+n)k_g}{y_g}$; $cy_g = \left(1-s_g\right)y_g$; $\frac{\Delta k}{k} = 0$; $\frac{\Delta y}{y} = 0$; $\frac{\Delta Y}{Y} = n$