Soluzioni per una funzione di produzione Y = $K^{1/3L\ 2/3}$ (dove K rappresenta il capitale e L il lavoro), in presenza di crescita della popolazione (n) e deprezzamento del capitale (δ).

1. Rendimenti di scala costanti

$$\mathrm{F}(\lambda\mathrm{K},\lambda\mathrm{L}) = (\lambda\mathrm{K})^{1/3}(\lambda\mathrm{L})^{2/3} = \lambda^{1/3}\mathrm{K}^{1/3}\lambda^{2/3}L^{2/3} = \lambda\mathrm{K}^{1/3}\mathrm{L}^{2/3} = \lambda\mathrm{F}(\mathrm{K},\mathrm{L})$$

2. Forma intensiva

$$\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{K}^{1/3}\mathrm{L}^{2/3}}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{K}^{1/3}}{\mathrm{L}^{1-2/3}} = \frac{\mathrm{K}^{1/3}}{\mathrm{L}^{1/3}} = \left(\frac{K}{L}\right)^{1/3}$$

Ponendo

$$y = \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{L}} \text{ e } k = \frac{K}{\mathrm{L}}$$

La funzione di produzione in forma intensiva diventa:

$$y = \mathrm{k}^{1/3}$$

3. Stato stazionario

$$\mathrm{sy} = (\delta + n)\mathrm{k}$$

$$\mathrm{sk}^{1/3} = \mathrm{n}$$

$$\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{k}^{1/3}} = \frac{s}{(\delta + n)}$$

$$\mathrm{k}^{2/3} = \frac{s}{(\delta + n)}$$

Valori di stato stazionario:

$k *= \left(\frac{s}{\delta+\mathrm{n}}\right)^{3/2}$; $y *= (\mathrm{k} *)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{s}{\delta+\mathrm{n}}\right)^{1/2}$; $sy *= \mathrm{s}\left(\frac{s}{\delta+\mathrm{n}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{s^{3/2}}{(\delta+\mathrm{n})^{1/2}}$; $cy *= (1 - s)y *$; $\frac{\Delta k}{k} = 0$; $\frac{\Delta y}{y} = 0$; $\frac{\Delta Y}{Y} = \mathrm{n}$

4. Regola aurea

$$\mathrm{PMk} = (\delta + n)$$

$$\mathrm{PMk} = \frac{\delta y}{\delta k} = \frac{1}{3}k^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\frac{1}{k^{2/3}} = \delta + n$$

Per cui:

$$k^{2/3} = \frac{1}{3(\delta + n)}$$

Valori di regola aurea:

$k_g = \left(\frac{1}{3(\delta+n)}\right)^{3/2}$; $y_g = \left(k_g\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3(\delta+\mathrm{n})}\right)^{1/2}$; $s_g = \frac{(\delta+n)k_g}{y_g}$; $cy_g = \left(1 - s_g\right)y_g$; $\frac{\Delta k}{k} = 0$; $\frac{\Delta y}{y} = 0$; $\frac{\Delta Y}{Y} = n$