

## Esercizio di approfondimento sul modello di Solow

Dott.ssa G. Nunziante  
giulia.nunziante@uniroma2.it

### Esercizio 1.

1.  $F(\lambda K, \lambda L) = \sqrt{\lambda K} \sqrt{\lambda L} = \lambda F(K, L)$

$$MPL = \frac{\delta Y}{\delta L} = \frac{1}{2} \frac{Y}{L}$$

$$MPK = \frac{\delta Y}{\delta K} = \frac{1}{2} \frac{Y}{K}$$

2. e 3.

$$\text{costo di } L \text{ unità di lavoro} = L * P * MPL = \frac{1}{2} PY$$

$$\text{costo di } K \text{ unità di capitale} = K * P * MPK = \frac{1}{2} PY$$

$$\text{Profitto} = PY - L * P * MPL - K * P * MPK = 0$$

4.  $y = \sqrt{k}$

6.  $k_A^* = 4; y_A^* = 2; s y_A^* = 0,2; c y_A^* = 1,8$   
 $k_B^* = 16; y_B^* = 4; s y_B^* = 0,8; c y_B^* = 3,2$

7. In stato stazionario,  $\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta y}{y} = 0$  e  $\frac{\Delta Y}{Y} = n = 0,01$

8. Per completare la tabella si ricorda che:

$$y_0 = \sqrt{k_0};$$

$$\text{risparmio nell'anno 0} = s * y_0;$$

$$\text{consumo nell'anno 0} = y_0 - s * y_0;$$

$$k_1 = k_0 + s * y_0 - (\delta + n) * k_0;$$

$$y_1 = \sqrt{k_1};$$

$$\text{risparmio nell'anno 1} = s * y_1;$$

$$\text{consumo nell'anno 1} = y_1 - s * y_1;$$

$$\frac{dy}{y} \text{ nell'anno 1} = \frac{y_1 - y_0}{y_0};$$

$$\frac{dk}{k} \text{ nell'anno 1} = \frac{k_1 - k_0}{k_0};$$

...

|        | Paese A |      |      |      |      |      | Paese B |       |      |      |      |      |
|--------|---------|------|------|------|------|------|---------|-------|------|------|------|------|
|        | y       | k    | c(y) | sy   | dy/y | dk/k | y       | k     | c(y) | sy   | dy/y | dk/k |
| Anno 0 | 1.73    | 3.00 | 1.56 | 0.17 |      |      | 4.24    | 18.00 | 3.39 | 0.85 |      |      |

|        |      |      |      |      |       |       |      |       |      |      |         |        |
|--------|------|------|------|------|-------|-------|------|-------|------|------|---------|--------|
| Anno 1 | 1.74 | 3.02 | 1.56 | 0.17 | 0.39% | 0.77% | 4.24 | 17.95 | 3.39 | 0.85 | - 0.14% | -0.29% |
| Anno 2 | 1.75 | 3.05 | 1.57 | 0.17 | 0.37% | 0.75% | 4.23 | 17.90 | 3.38 | 0.85 | - 0.14% | -0.28% |
| Anno 3 | 1.75 | 3.07 | 1.58 | 0.18 | 0.36% | 0.73% | 4.22 | 17.85 | 3.38 | 0.84 | - 0.14% | -0.27% |
| Anno 4 | 1.76 | 3.09 | 1.58 | 0.18 | 0.35% | 0.71% | 4.22 | 17.80 | 3.38 | 0.84 | - 0.13% | -0.27% |

Mc 1d, 2c, 3b, 4a, 6c, 7d

### Multiple choice

1c, 2c

### Esercizio 2.

1.  $k^* = 0,444$ ;  $y^* = 0,667$ ;  $s_y^* = 0,067$ ;  $c_y^* = 0,6$ ;  $\frac{\Delta k}{k} = 0$ ;  $\frac{\Delta y}{y} = 0$ ;  $\frac{\Delta Y/L}{Y/L} = 0,035$ ;  $\frac{\Delta Y}{Y} = 0,05$
2.  $k_g^* = 11,111$ ;  $y_g^* = 3,333$ ;  $s_g = 0,5$ ;  $s_{y_g}^* = 1,667$ ;  $c_{y_g}^* = 1,667$ ;  
 $\frac{\Delta k}{k} = 0$ ;  $\frac{\Delta y}{y} = 0$ ;  $\frac{\Delta Y/L}{Y/L} = 0,035$ ;  $\frac{\Delta Y}{Y} = 0,05$

Mc 1d, 2d, 3b

**Soluzioni per una funzione di produzione  $Y = K^{1/3} L^{2/3}$  (dove  $K$  rappresenta il capitale e  $L$  il lavoro), in presenza di crescita della popolazione ( $n$ ) e deprezzamento del capitale ( $\delta$ ).**

1. Rendimenti di scala costanti

$$F(\lambda K, \lambda L) = (\lambda K)^{1/3} (\lambda L)^{2/3} = \lambda^{1/3} K^{1/3} \lambda^{2/3} L^{2/3} = \lambda K^{1/3} L^{2/3} = \lambda F(K, L)$$

2. Forma intensiva

$$\frac{Y}{L} = \frac{K^{1/3} L^{2/3}}{L} = \frac{K^{1/3}}{L^{1-2/3}} = \frac{K^{1/3}}{L^{1/3}} = \left(\frac{K}{L}\right)^{1/3}$$

Ponendo

$$y = \frac{Y}{L} \text{ e } k = \frac{K}{L}$$

La funzione di produzione in forma intensiva diventa:

$$y = k^{1/3}$$

3. Stato stazionario

$$s_y = (\delta + n)k$$

$$s k^{1/3} = (\delta + n)k$$

$$\frac{k}{k^{1/3}} = \frac{s}{(\delta + n)}$$

$$k^{2/3} = \frac{s}{(\delta + n)}$$

Valori di stato stazionario:

$$k^* = \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{3/2}; y^* = (k^*)^{1/3} = \left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{1/2}; sy^* = s\left(\frac{s}{\delta+n}\right)^{1/2} = \frac{s^{3/2}}{(\delta+n)^{1/2}}; cy^* = (1-s)y^*; \frac{\Delta k}{k} = 0; \frac{\Delta y}{y} = 0; \frac{\Delta Y}{Y} = n$$

4. Regola aurea

$$PMk = (\delta + n)$$

$$PMk = \frac{\delta y}{\delta k} = \frac{1}{3} k^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \frac{1}{k^{2/3}} = \delta + n$$

Per cui:

$$k^{2/3} = \frac{1}{3(\delta + n)}$$

Valori di regola aurea:

$$k_g = \left(\frac{1}{3(\delta+n)}\right)^{3/2}; y_g = (k_g)^{1/3} = \left(\frac{1}{3(\delta+n)}\right)^{1/2}; s_g = \frac{(\delta+n)k_g}{y_g} = \frac{1}{3}; cy_g = (1-s_g)y_g; \frac{\Delta k}{k} = 0; \frac{\Delta y}{y} = 0; \frac{\Delta Y}{Y} = n$$