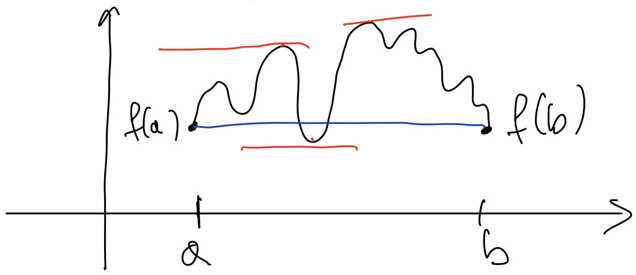
TEOREMA DI ROLLE: SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ E SI SUPPONGA CHE f É CONTINUA IN $[a,b]$ E f É DIFFERENZIABILE IN (a,b). SI SUPPONGA OLTRETUTTO CHE $f(a)=f(b)$. ALLORA $\exists\, x_0 \in (a,b)$ TALE CHE $f'(x_0)=0$ (OVVERO ESISTE ALMENO UN PUNTO CRITICO).



DIM: f É CONTINUA SU UN INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO QUINDI PER IL TEOREMA DI WEIERSTRASS f AMMETTE UN PUNTO MINIMO E PUNTO MASSIMO. OVVERO $\exists\, m, M \in [a,b]$ TALI CHE

$$(\circledast)\quad f(m) \le f(x) \le f(M) \quad \forall\, x \in [a,b]$$

1) SUPPONIAMO CHE NE m NE M SIANO PUNTI INTERNI OVVERO CHE

$$m \notin (a,b) \quad E \quad M \notin (a,b)$$

QUINDI SONO ENTRAMBI IN UNO DEI BORDI. MA $f(a)=f(b)$

SICCOME $f(m)=f(M)$ ALLORA $\circledast$ IMPLICA CHE

$f(x)=f(m)=f(M) \quad \forall\, x \in [a,b]$ MA ALLORA

$$f'(x)=0 \quad \forall\, x \in (a,b)$$

2) SUPPONIAMO CHE ALMENO $M \in (a,b)$. SE PRENDO h SUFFICIENTEMENTE PICCOLO AVRÒ CHE $M+h \in (a,b)$. POICHÉ M É IL PUNTO DI MASSIMO ALLORA $f(M+h) \le f(M)$. VADO A CALCOLARE

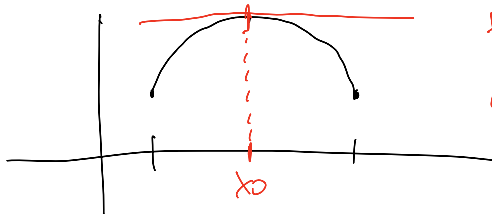
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\overbrace{f(M+h)-f(M)}^{\le 0}}{\underbrace{h}_{\ge 0}} = f'(x_0^+) \le 0 \qquad \Bigg| \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{\overbrace{f(M+h)-f(M)}^{\le 0}}{\underbrace{h}_{\le 0}} = f'(x_0^-) \ge 0$$

$$x_0 = M \qquad\qquad x_0 = M$$

POICHÉ, PER IPOTESI, f É DIFFERENZIABILE DEVE ESSERE:

$$f'(x_0)=\underbrace{f'(x_0^+)}_{\le 0}=\underbrace{f'(x_0^-)}_{\ge 0} \Rightarrow f'(x_0)=0$$

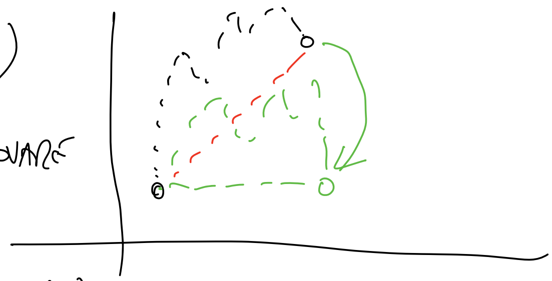
$$f'(M)=0$$



POSSO ELIMINARE L'IPOTESI $f(a)=f(b)$?

TEOREMA DI LAGRANGE: SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f CONTINUA IN $[a,b]$, f DIFFERENZIABILE IN (a,b). ALLORA ESISTE $x_0\in(a,b)$ TALE CHE

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$



DIM: SIA $g(x)=f(x)-\alpha x$ DEVO TROVARE α TALE PER CUI $g(a)=g(b)$

$$g(a)=f(a)-\alpha a=f(b)-\alpha b=g(b)$$

$$\alpha b-\alpha a=f(b)-f(a)\Rightarrow \alpha(b-a)=f(b)-f(a)$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

QUINDI SIA $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$ E $g(x)$ SODDISFA LE IPOTESI DEL TEOREMA DI ROLLE. PER CUI $\exists x_0\in(a,b)$ TALE CHE $g'(x_0)=0$.

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$ QUINDI $g'(x_0)=0$

EQUIVALE A: $$f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\Rightarrow f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ CVD

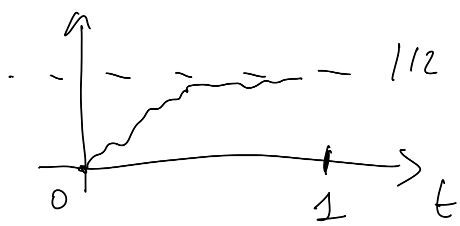
ESERCIZIO: SIA $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $[0,1]$ E DIFFERENZIABILE IN $(0,1)$. LA FUNZIONE $f(t)$ INDICA IL PIL DI UN PAESE ALL'ISTANTE $t\in[0,1]$. SI SUPPONGA CHE

$$0\le f'(t)\le \frac{1}{2}=0.5$$

SI ASSUMA ANCHE CHE $f(0)=0$.
SI DIMOSTRI CHE $f(1)\le\frac{1}{2}$.

SOLUZIONE: APPLICO LAGRANGE PER CUI $\exists\, x_0\in(0,1)$ TALE CHE

$$f(1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(x_0)\le\frac{1}{2}$$



ESERCIZIO: SI DIMOSTRI CHE $\log_e(x)\le x \quad \forall x\in(0,+\infty)$.

SOLUZIONE: 1) SE $0<x<1$ ALLORA

$$\log(x)<0<x$$

2) SE $x=1 \Rightarrow \log_e(x)=\log(1)=0<1=x$

3) SIA $x>1$. APPLICO LAGRANGE ALL'INTERVALLO $(1,x)$
$\exists\, x_0\in(1,x)$ TALE CHE

$$\frac{\log(x)-\overbrace{\log(1)}^{=0}}{x-1}=\frac{1}{x_0}=f'(x_0)$$

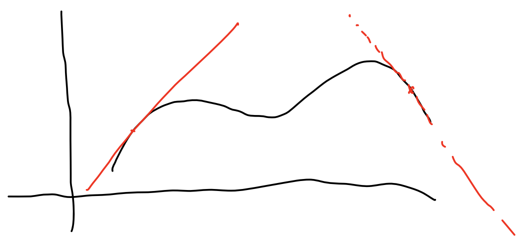
$f(x)=\log(x)$

$(\log(x))'=\frac{1}{x}$

$$\frac{\log(x)}{x-1} = \frac{1}{x_0} \Rightarrow \log(x) = \frac{x-1}{x_0} = \frac{x}{x_0} - \underbrace{\frac{1}{x_0}} < \frac{x}{x_0}$$

POICHÉ $x_0 \in (1,x)$ ABBIAMO CHE $x_0 > 1 \Rightarrow \frac{x}{x_0} < x$ E

QUINDI $\boxed{\log(x) < \frac{x}{x_0} < x}$



TEO: SIA $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE DIFFERENZIABILE IN (a,b). ALLORA SE $f'(x) \geq 0$ ($\leq$) $\forall\, x \in (a,b)$ LA FUNZIONE È DE-CRESCENTE IN $[a,b]$.

DIM: SIANO $x_1, x_2 \in (a,b)$ TALI CHE $x_1 < x_2$. POICHÉ f È DIFFERENZIABILE IN (a,b) ALLORA È CONTINUA IN (a,b) MA QUINDI ESSA È CONTINUA IN $[x_1,x_2]$ E DIFFERENZIABILE IN (x_1,x_2) QUINDI POSSO APPLICARE LAGRANGE A f IN $[x_1,x_2]$. PER CUI $\exists\, x_0 \in (x_1,x_2)$ TALE CHE

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(x_0)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq 0$$

QUINDI $f(x_1) \leq f(x_2)$.
OVVERO HO DIMOSTRATO CHE SE $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$ OVVERO f È CRESCENTE IN (a,b)

TEO: SIA $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ DIFFERENZIABILE IN (a,b) E SI SUPPONGA CHE f È (DE)CRESCENTE IN (a,b). ALLORA $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) $\forall\, x \in (a,b)$

DIM: SIA $x_0 \in (a,b)$. SE PRENDO UN h SUFFICIENTEMENTE PICCOLO AVRÒ CHE $x_0+h \in (a,b)$. SIA $h>0$ PICCOLA ABBASTANZA.

CONSIDERO $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ E POICHÉ f È CRESCENTE

$f(x_0+h) \geq f(x_0)$ DATO CHE $h>0$ $\begin{cases} x_0 < x_0+h \\ f(x_0) \leq f(x_0+h) \end{cases}$

$$\forall h>0 \Rightarrow \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$$

SE $h<0$ ALLORA $h=-|h|$ e $x_0+h = x_0-|h|$ QUINDI

$f(x_0+h) = f(x_0-|h|) \leq f(x_0)$ ESSENDO $x_0-|h| < x_0$

PER CUI

$$\forall h<0 \Rightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0-|h|)-f(x_0)}{-|h|} = \frac{f(x_0)-f(x_0-|h|)}{|h|} \geq 0$$

E QUINDI $f'(x_0^-) = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$. IN SINTESI:

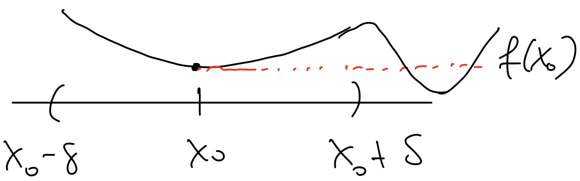
$f'(x_0^+) \geq 0$ E $f'(x_0^-) \geq 0$ MA f È DERIVABILE QUINDI

$$f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0) \geq 0 \quad \boxed{\text{VCVD}}$$

DEF: SIA $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ E SIA $x_0 \in (a,b)$. SI DICE CHE x_0 È UN PUNTO DI MINIMO (MASSIMO) LOCALE PER f SE ESISTE $\delta>0$ TALE CHE:

1) $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq (a,b)$

2) $\forall\, x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ SI HA CHE $f(x) \overset{\le}{\ge} f(x_0)$



TEOREMA DI FERMAT: SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ UNA FUNZIONE E SIA $x_0 \in (a,b)$ UN MASSIMO O MINIMO LOCALE. ALLORA CI SONO SOLO DUE POSSIBILITÀ:

1) $\exists\, f'(x_0)$ E ALLORA $f'(x_0)=0$

2) $\nexists\, f'(x_0)$

DIM: SUPPONIAMO PER ESEMPIO CHE x_0 SIA UN MINIMO LOCALE. QUINDI SIA h UN NUMERO SUFFICIENTEMENTE PICCOLO E SI AVRÀ $f(x_0+h) \ge f(x_0)$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\ge 0}}{\underbrace{h}_{>0}} = f'(x_0^+) \ge 0$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\ge 0}}{\underbrace{h}_{<0}} = f'(x_0^-) \le 0$$

QUINDI HO SOLO DUE POSSIBILITÀ:

1) $\exists\, f'(x_0) = \underbrace{f'(x_0^-)}_{\le 0} = \underbrace{f'(x_0^+)}_{\ge 0} = 0$

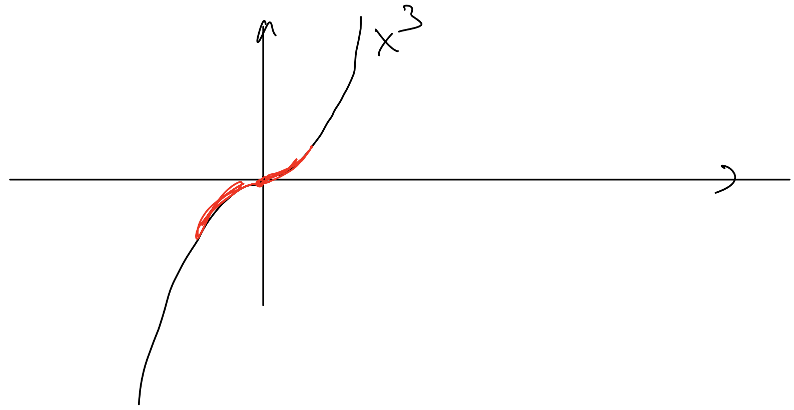
2) $\nexists\, f'(x_0)$

ESEMPIO: $f(x)=|x|$ SI HA CHE $x_0=0$ È UN MINIMO LOCALE MA $\nexists\, f'(0)$

$f(x) = x^3$ si ha che $f'(x) = 3x^2$ quindi $f'(0) = 0$

ma $x_0 = 0$ non è né un minimo né un massimo quindi

la condizione $f'(x_0) = 0$ è necessaria ma non sufficiente.



Esercizio: Si trovino tutti i massimi e i minimi di

$$f(x) = x^x$$

Soluzione: $f'(x) = x^x(1 + \log(x))$ devo risolvere l'equazione

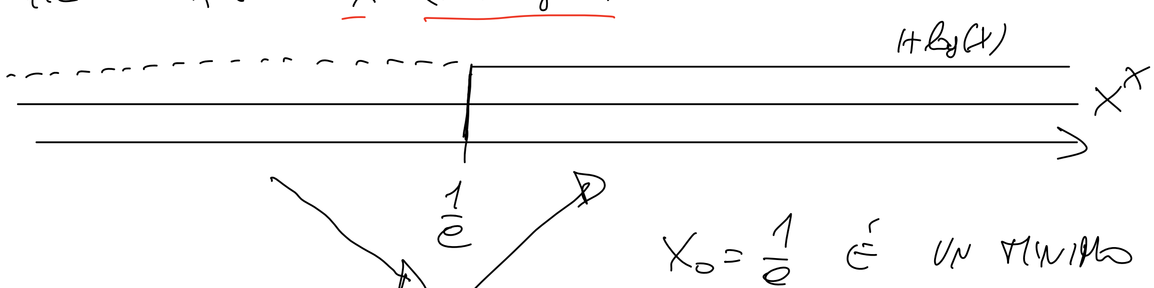
$f'(x) = 0$ ovvero $\underbrace{x^x}_{\neq 0}(1 + \log(x)) = 0 \iff$

$1 + \log(x) = 0 \iff \log(x) = -1 \iff x = e^{-1} = 1/e$

Unico candidato è $x_0 = 1/e$. Domanda: x_0 è un max, un min

o nessuno dei due? Studio il segno della $f'(x)$ attorno

a $x_0 = 1/e$. $f'(x) = x^x(1 + \log(x))$



$x_0 = \frac{1}{e}$ è un minimo locale

$D = (0, +\infty)$ $\lim_{x \to 0^+} x^x = 1$ $\lim_{x \to +\infty} x^x = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$