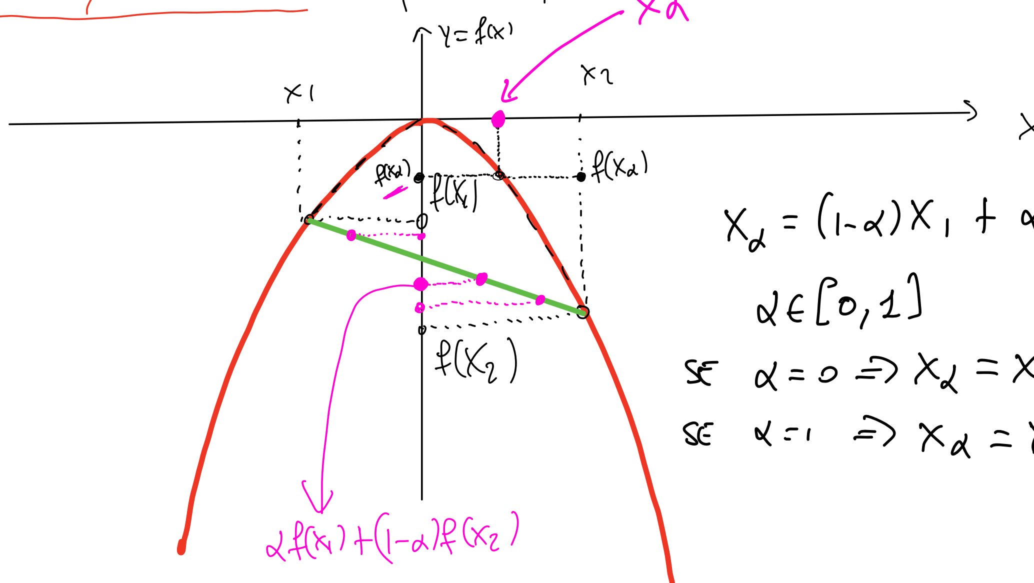
CONCAVITÀ / CONVESSITÀ: $f(x) = -x^2$



$$x_\alpha = (1-\alpha)x_1 + \alpha x_2$$

$$\alpha \in [0,1]$$

SE $\alpha = 0 \Rightarrow x_\alpha = x_1$

SE $\alpha = 1 \Rightarrow x_\alpha = x_2$

$\forall \alpha \in [0,1] \Rightarrow f(x_\alpha) = f(\alpha x_1 + (1-\alpha) f(x_2)) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$

DEF: SIA $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. SI DICE CHE f È CONCAVA SE $\forall x_1, x_2 \in D$ SI HA CHE

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

SIA $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. SI DICE CHE f È CONVESSA SE $\forall x_1, x_2 \in D$ SI HA CHE

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

TEO: SIA $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ALLORA f È CONVESSA (CONCAVA) IN D SE E SOLTANTO SE $\forall x_1, x_2, x_3 \in D: x_1 < x_2 < x_3$ SI HA CHE

$$\boxed{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq (\geq) \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}}$$

TEO: SIA $f: [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ TALE CHE f È DERIVABILE IN (a,b). ALLORA f È CONVESSA IN $[a,b]$ SE E SOLTANTO SE f' È CRESCENTE IN $[a,b]$.

DIM: $\boxed{\Rightarrow}$ SIA f CONVESSA IN $[a,b]$. SIANO x_1, x_2, x_3, x_4 PUNTI DI $[a,b]$ TALI CHE $a \le x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \le b$. POICHÉ f É CONVESSA ALLORA

$$f'(x_1) \xleftarrow[\lim_{x_2 \to x_1^+}]{} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \le \underbrace{\frac{f(x_4)-f(x_3)}{x_4-x_3}}_{\lim_{x_3 \to x_4^-}} \to f'(x_4)$$

$f'(x_1) \le f'(x_4)$ x_1 E x_4 SONO ARBITRARI HO CHE

f' É CRESCENTE

$\boxed{\Leftarrow}$ SIA f DERIVABILE IN (a,b). SIANO x_1, x_2, x_3 PUNTI DI (a,b) TALI CHE $x_1 < x_2 < x_3$.

PER LAGRANGE $\exists\, \alpha \in (x_1, x_2)$ TALE CHE

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\alpha) \qquad x_1 < \alpha < x_2 < \beta < x_3$$

PER LAGRANGE $\exists\, \beta \in (x_2, x_3)$ TALE CHE

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(\beta)$$

f' PER IPOTESI É CRESCENTE ED ESSENDO $\alpha < \beta \Rightarrow$

$f'(\alpha) \le f'(\beta)$ OVVERO

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

OVVERO f É CONVESSA.

TEO: SE $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f DIFFERENZIABILE IN (a,b) ALLORA

$$f \text{ È } \begin{cases}\nearrow \text{CONVESSA} \\ \searrow \text{CONCAVA}\end{cases} \iff f' \begin{cases}\nearrow \text{CRESCENTE} \\ \searrow \text{DECRESCENTE}\end{cases}.$$

COROLLARIO: SE $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f È DIFFERENZIABILE DUE VOLTE IN (a,b) ALLORA

$$f \text{ È } \begin{cases}\nearrow \text{CONVESSA} \\ \searrow \text{CONCAVA}\end{cases} \iff f'' \begin{cases}\nearrow \geq 0 \\ \searrow \leq 0\end{cases}$$

TEO: SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. f È DIFFERENZIABILE DUE VOLTE IN (a,b). SIA $x_0\in(a,b)$ TALE CHE $f'(x_0)=0$. ALLORA SE:

1) $f''(x_0)>0 \Rightarrow x_0$ È UN PUNTO DI MINIMO LOCALE.

2) $f''(x_0)<0 \Rightarrow x_0$ È UN PUNTO DI MASSIMO LOCALE.

DIM: SUPPONIAMO CHE $f''(x_0)>0$.

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f'(x_0+h)}{h} > 0$$

PRENDO $\exists$ TALE CHE $f''(x_0)-\varepsilon>0$ TALE ε ESISTE PERCHÉ $f''(x_0)>0$. MA ALLORA PER h POSITIVI SUFFICIENTEMENTE PICCOLI HO CHE

$$0 < f''(x_0)-\varepsilon < \frac{f'(x_0+h)}{h} < f''(x_0)+\varepsilon$$

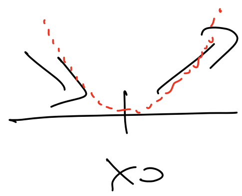
ESSENDO h POSITIVO HO CHE

$$0 < \left(f''(x_0) - \varepsilon\right)\cdot h < f'(x_0+h) \quad \text{OVVERO}$$

f' È POSITIVA IN UN INTORNO DESTRO DI x_0

REPLICANDO LO STESSO RAGIONAMENTO CON IL $\lim_{h\to 0^-}$ OTTENGO

CHE $f'(x_0+h) < 0$ IN UN INTORNO SINISTRO DI x_0

E QUINDI:  $\Rightarrow$ x_0 È UN MINIMO LOCALE

ESERCIZIO: TROVARE I MASSIMI E I MINIMI LOCALI DI

$$f(x) = \frac{\log(x)}{x} \qquad \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{x}\right)' = (-1)x^{-2}$$

SOLUZIONE: $D = ? = (0, +\infty)$

$$f'(x) = \left(\log(x)\cdot\frac{1}{x}\right)' = \left(\log(x)\right)'\cdot\frac{1}{x} + \log(x)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= \frac{1}{x^2} + \log(x)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{\log(x)}{x^2} = \frac{1-\log(x)}{x^2}$$

RISOLVO $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\log(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \log(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$

$$f''(x) = \left(\left(1-\log(x)\right)\cdot\frac{1}{x^2}\right)' = \left(1-\log(x)\right)'\cdot\frac{1}{x^2} + \left(1-\log(x)\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)' =$$

$$= \left(-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2} + \left(1-\log(x)\right)\left(-\frac{2}{x^3}\right) = -\frac{1}{x^3} - \frac{2\left(1-\log(x)\right)}{x^3} =$$

$$= -\left[\frac{1+2-2\log(x)}{x^3}\right] = -\frac{3-2\log(x)}{x^3}$$

$$f''(e) = -\frac{3-2\log(e)}{e^3} = -\frac{1}{e^3} < 0 \Rightarrow \text{MASSIMO LOCALE}$$

ESERCIZIO: SI CONSIDERI IL PROBLEMA DI UN MONOPOLISTA CHE IMMETTE UN BENE NEL MERCATO. IL PREZZO PER UNITÀ DEL BENE È DATO DA:

$$p(x) = p_0 - x \quad \text{DOVE} \quad x = \text{QUANTITÀ DEL BENE IMMESSA NEL MERCATO}$$

$0 \leq x \leq p_0$

IL MONOPOLISTA HA UN COSTO DI PRODUZIONE PER PRODURRE x QUANTITÀ

$$C(x) = C_0 + \alpha x \qquad \alpha > 0, \; C_0 > 0$$

C_0: COSTO DELL' IMPIANTO DI PRODUZIONE.

I RICAVI DEL MONOPOLISTA PER AVER VENDUTO x QUANTITÀ DEL BENE SONO PARI A $R(x) = x \cdot p(x) = p_0 x - x^2$

SI DETERMINI:

1) LA QUANTITÀ OTTIMALE DI BENE DA IMMETTERE NEL MERCATO CHE MASSIMIZZA IL PROFITTO NETTO DEFINITO COME

$$\pi(x) = R(x) - C(x) = p_0 x - x^2 - C_0 - \alpha x$$

2) CALCOLARE QUINDI IL PROFITTO OTTIMALE

3) STABILIRE IL VALORE MASSIMO DI C_0 CHE

GARANTISCE UN PROFITTO OTTIMALE POSITIVO.

SOLUZIONE:

$$\Pi(x) = x(P_0 - \alpha) - x^2 - C_0$$

$$\Pi'(x) = P_0 - \alpha - 2x = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = \frac{P_0 - \alpha}{2} \quad \text{È UN MASSIMO!}$$

$$\Pi''(x) = -2 < 0 \Rightarrow x_0 = \frac{P_0 - \alpha}{2} \text{ È UN}$$

MASSIMO.

IL PROFITTO OTTIMALE È $\Pi(x_0)$ OVVERO

$$\Pi(x_0) = \frac{(P_0 - \alpha)}{2} \cdot (P_0 - \alpha) - \frac{(P_0 - \alpha)^2}{4} - C_0 =$$

$$= \frac{(P_0 - \alpha)^2}{2} - \frac{(P_0 - \alpha)^2}{4} - C_0 = \frac{(P_0 - \alpha)^2}{4} - C_0$$

$$\Pi(x_0) > 0 \Rightarrow \frac{(P_0 - \alpha)^2}{4} - C_0 > 0 \Rightarrow$$

$$C_0 < \boxed{\frac{(P_0 - \alpha)^2}{4}} = C_0^{MAX}$$

ESERCIZIO: TROVARE MASSIMI E MINIMI DI

$$f(x) = \log(1 - \log(x)) - \log(x)$$

$D = ?$ $\quad \begin{cases} x > 0 \\ 1 - \log(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 1 > \log(x) \Rightarrow x < e \end{cases} \Rightarrow D = (0, e)$

$$f'(x) = \left(\log(1 - \log(x))\right)' - \frac{1}{x} = \frac{1}{1 - \log(x)} \cdot (1 - \log(x))' - \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1}{1 - \log(x)} \left(-\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(1 - \log(x))} - \frac{1}{x} = \downarrow$$

$$= -\frac{1}{x}\left[\frac{1}{1 - \log(x)} + 1\right] = -\frac{1}{x} \frac{1 + 1 - \log(x)}{1 - \log(x)} = -\frac{2 - \log(x)}{(1 - \log(x))x}$$

$2 - \log(x) = 0 \Rightarrow x = e^2 \Rightarrow ?\ e^2 \notin D \Rightarrow$ NÉ MAX NÉ MIN

ESERCIZIO: SI TROVINO MASSIMI E MINIMI E SI STABILISCANO GLI INTERVALLI DI CONCAVITÀ / CONVESSITÀ DI

$$f(x) = \log(1 + \log(x)) - \log(x)$$

$D: \begin{cases} x > 0 \\ 1 + \log(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log(x) > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{1}{e} \end{cases} \quad D = \left(\frac{1}{e}, \infty\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \log(x)} \cdot (1 + \log(x))' - \frac{1}{x} = \frac{1}{1 + \log(x)} \frac{1}{x} - \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1}{x}\left[\frac{1}{1 + \log(x)} - 1\right] = \frac{1}{x}\left[\frac{\cancel{1} - \cancel{1} - \log(x)}{1 + \log(x)}\right] = -\frac{\log(x)}{x(1 + \log(x))}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \log(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 1}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{\log(x)}{(1+\log(x))x}\right)' = \frac{(\log(x))^2 + \log(x) - 1}{\underbrace{x^2(1+\log(x))^2}_{\geq 0}}$$

$$(\log(x))^2 + \log(x) - 1 \geq 0 \qquad t = \log(x)$$

$$t^2 + t - 1 \geq 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

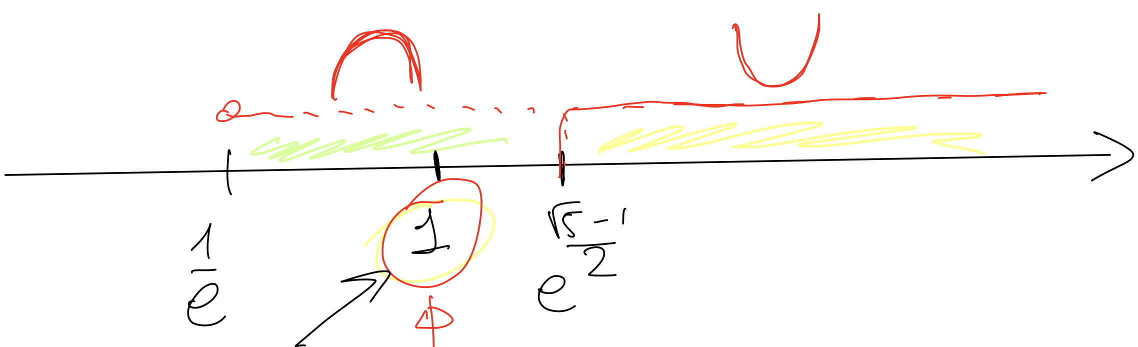
$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\cancel{t \leq -\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \quad t \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\log(x) \leq -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x \leq e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \simeq 0.1983 < \frac{1}{e} \simeq 0.367$$

$$\log(x) \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow x \geq e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \simeq 1.85 > \frac{1}{e}$$



MASSIMO LOCALE