lunedì	06/11/2023	Lezione	14:00	16:00	Aula Magna
martedì	07/11/2023	Lezione	14:00	16:00	Aula Magna
martedì	07/11/2023	Esercitazione	16:00	18:00	Aula Magna
mercoledì	08/11/2023	Lezione	14:00	16:00	Aula I2
lunedì	13/11/2023	Lezione	14:00	16:00	Aula Magna
martedì	14/11/2023	Esercitazione	16:00	18:00	Aula Magna
mercoledì	15/11/2023	Lezione	14:00	16:00	Aula P3
lunedì	20/11/2023	Lezione	14:00	16:00	Aula Magna
martedì	21/11/2023	Lezione	14:00	16:00	Aula Magna
martedì	21/11/2023	Esercitazione	16:00	18:00	Aula Magna
mercoledì	22/11/2023	Lezione	14:00	16:00	Aula Magna
lunedì	27/11/2023	Lezione	14:00	16:00	Aula Magna
martedì	28/11/2023	Lezione	14:00	16:00	Aula I4
martedì	28/11/2023	Esercitazione	16:00	18:00	Aula T5
mercoledì	29/11/2023	Lezione	14:00	16:00	Aula I4
martedì	05/12/2023	Esercitazione	16:00	18:00	Aula Magna

SVILUPPI DI TAYLOR: SIA $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA IN $[a,b]$ E DERIVABILE m-VOLTE IN (a,b) CON DERIVATA m-ESIMA CONTINUA IN $[a,b)$. SIA $x_0\in(a,b)$. ALLORA

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3+\dots+\frac{1}{m!}f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m}+\underbrace{o((x-x_0)^m)}$$

DIM: $\boxed{m=1}$ f È CONTINUA, f È DERIVABILE E LA DERIVATA PRIMA È CONTINUA

$$g(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

1) f È CONTINUA QUINDI ANCHE g È CONTINUA
2) f È DERIVABILE QUINDI ANCHE g È DERIVABILE E POICHÉ f' È CONTINUA ALLORA ANCHE g' È CONTINUA.

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)\right]=0$$

PER LA CONTINUITÀ DI f IN x_0 $\left(\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\right)$

$$g'(x)=\left(f(x)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot(x-x_0)\right)'=$$

$$=f'(x)-\left(f'(x_0)(x-x_0)\right)'=f'(x)-f'(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} g'(x) = \lim_{x\to x_0} \left[f'(x) - f'(x_0)\right] = 0$$

PERCHÉ PER IPOTESI f' È CONTINUA QUINDI $\lim_{x\to x_0} f'(x) = f'(x_0)$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{x-x_0} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{1} = 0 \qquad g(x) = o(x-x_0)$$

$$g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot(x-x_0) = o(x-x_0)$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + o(x-x_0)$$

OVVERO LA FORMULA DI TAYLOR PER $n=1$.

$\boxed{n=2}$: LA FUNZIONE f È 2-VOLTE DERIVABILE E LA DERIVATA SECONDA È CONTINUA.

DEFINISCO: $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2$

1) f È 2-VOLTE DERIVABILE $\Rightarrow$ g È 2-VOLTE DERIVABILE

2) f'' È CONTINUA $\Rightarrow$ g'' È CONTINUA.

IN SOSTANZA g EREDITA TUTTE LE PROPRIETÀ DI f.

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} \Big[\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\to 0} - f'(x_0)\underbrace{(x-x_0)}_{\to 0} - \frac{f''(x_0)}{2}\underbrace{(x-x_0)^2}_{\to 0}\Big] = 0$$

0 PERCHÉ f È CONTINUA.

$$g'(x) = \left[f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2}(x-x_0)^2\right]' = f'(x) - f'(x_0) - \frac{2}{2}(x-x_0)f''(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} g'(x) = \lim_{x\to x_0} \Big[\underbrace{f'(x) - f'(x_0)}_{\to 0} \underbrace{- \frac{2f''(x_0)}{2}(x-x_0)}_{\to 0}\Big] = 0$$

PERCHÉ f' È CONTINUA (ESSENDO DERIVABILE)

$$g''(x) = \left(f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0)\right)' = f''(x) - f''(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0} g''(x) = \lim_{x\to x_0}\left(f''(x) - f''(x_0)\right) = 0$$ ESSENDO PER IPOTESI f'' CONTINUA.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{(x-x_0)^2} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{g'(x)}{2(x-x_0)} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{g''(x)}{2} = 0$$

$$g(x) = o\left((x-x_0)^2\right) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot(x-x_0) - \frac{1}{2} f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^2\right)$$

QUINDI ABBIAMO DIMOSTRATO LA FORMULA DI TAYLOR PER $n=2$.
LA FORMULA PER UN GENERICO n SI DIMOSTRA PER INDUZIONE.

ESEMPIO: SI SCRIVA LO SVILUPPO DI TAYLOR PER LA FUNZIONE $f(x)=e^x$ INTORNO AL PUNTO $x_0=0$ PER UN GENERICO n.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

$f(x) = e^x \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = 1$

$\vdots \qquad \vdots$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n) \qquad \boxed{x_0=0}$$

ESERCIZIO: USANDO UNO SVILUPPO DI e^x AL TERZO ORDINE CON CENTRO $x_0=0$ SI CALCOLI UNA APPROSSIMAZIONE PER IL NUMERO e

SOLUZIONE: SCRIVO LO SVILUPPO DI e^x INTORNO A $x_0=0$ FINO ALL'ORDINE $n=3$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \leftarrow x = 1$$

$$e \simeq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{12+3+1}{6} = \frac{16}{6}$$

$$e \simeq \frac{8}{3} = 2,\overline{6}$$

$$e = 2,7183 \,..$$

ESERCIZIO: USANDO UNO SVILUPPO DI $\sqrt{1+x}$ INTORNO A $x_0 = 0$ E DI ORDINE $n=3$ SI CALCOLI UNA APPROSSIMAZIONE PER IL NUMERO $\sqrt{2}$

$$f(x) = \sqrt{1+x} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{1+x}\right)' = \left((1+x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}}$$

$$f''(0) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}\right)' = +\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8(1+x)^{5/2}}$$

$$f'''(0) = \frac{3}{8}$$

$$\sqrt{1+x} = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2!}f''(0)\cdot x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)\cdot x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)x^2 + \frac{1}{\cancel{6}_{2}}\,\frac{\cancel{3}}{8}x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \qquad x = 1$$

$$\sqrt{2} \simeq 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{16+8-2+1}{16} = \frac{23}{16} = \underline{1,4}375$$

$$\sqrt{2} = \underline{1,4}142\ldots\ldots$$

ESERCIZIO: $f(x) = \ln(1+x)$ $\qquad n = 3 \qquad x_0 = 0$

$\ln(2)$ $\qquad \log = \ln = \log_e$

$$f(0) = \ln(1) = 0 \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \left((1+x)^{-1}\right)' = -(1+x)^{-2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \left(-(1+x)^{-2}\right)' = +2(1+x)^{-3} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f'''(0) = 2$$

$$\ln(1+x) = \ln(1) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2} f''(0) x^2 + \frac{1}{6} f'''(0) x^3 + o(x^3)$$

$$= 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 \qquad x = 1$$

$$\ln(2) \simeq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6-3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

$$= 0{,}8\overline{3}$$

$f(x) = \cos(x)$ $\qquad x_0 = 0$ $\qquad n$ ARBITRARIO.

$f(0) = \cos(0) = 1$

$f'(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(0) = \sin(0) = 0$

$f''(x) = -\cos(x) \Rightarrow f''(0) = -\cos(0) = -1$ $\qquad x^2$

$f'''(x) = -\sin(x) \Rightarrow f'''(0) = -\sin(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = \cos(x) \Rightarrow f^{(4)}(0) = \cos(0) = 1$

$f^{(5)}(x) = \sin(x) \Rightarrow f^{(5)}(0) = \sin(0) = 0$

$f^{(6)}(x) = -\cos(x) \Rightarrow f^{(6)}(0) = -\cos(0) = -1$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 \dots -$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$f(x) = x^2 e^{-x}$

1) DOMINIO 2) ASINTOTI VERTICALI / ORIZZONTALI

3) EVENTUALI LIMITI NEI PUNTI DI FRONTIERA DEL DOMINIO

4) STUDIO DEL SEGNO DI f OVVERO LE REGIONI IN CUI $f \geq 0$ E $f \leq 0$

5) INTERSEZIONE CON L'ASSE $x=0$ E L'ASSE $y=0$

6) DERIVATA E REGIONI IN CUI CRESCE/DECRESCE

7) PUNTI CRITICI $(f'(x) = 0)$

8) REGIONI DI CONCAVITÀ / CONVESSITÀ

9) MASSIMI E MINIMI

10) UTILIZZANDO I PUNTI 1), 2), 3), ..., 9) ABBOZZARE UN GRAFICO DI FUNZIONE