

$$1) A \in \mathcal{M}(m \times k) \quad v \in \mathbb{R}^k$$

$$A \cdot v = v_1 A_1 + \dots + v_k A_k \in \mathbb{R}^m$$

$$(A \cdot v)_q = \sum_{j=1}^k A_{qj} v_j \quad q = 1, \dots, m$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$2 \times 3 \quad 3 \times 1 \quad 2 \times 1$

$$2) A \in \mathcal{M}(m \times k), B \in \mathcal{M}(k \times n) \Rightarrow (A \cdot B) \in \mathcal{M}(m \times n)$$

$$\rightarrow (A \cdot B)_{ij} = \sum_{q=1}^k A_{iq} B_{qj} \quad \begin{matrix} i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

IN GENERAL  $A \cdot B \neq B \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \quad 3 \times 2 \quad 2 \times 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \textcircled{3 \times 3}$$

DEF: Si chiama MATRICE IDENTITA' di DIMENSIONE  $n$   
 LA MATRICE QUADRATA  $n \times n$  i cui ELEMENTI SONO

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

TEO:  $I$  è l'ELEMENTO NEUTRO DELLA Moltiplicazione TRA MATRICI

DM: SIA  $A \in M(n \times n)$

$$\underline{(A \cdot I)_{ij}} = \sum_{q=1}^n A_{iq} \underset{\uparrow}{I}_{qj} = \underline{A_{ij}}$$

PERCHÉ  $I_{qi}$  è  $\neq 0$  se e solo se  $q=i$

$$A \cdot I = A$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Se  $a, b \in \mathbb{R}$   $\frac{a}{b} = a \cdot \underline{b^{-1}}$

$$\underline{b \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot b = 1}$$

$\uparrow$   
 $b \neq 0$   
 $\uparrow$

DEF: Sia  $A \in M(n \times n)$ . Si dice che  $A$  è **invertibile**

se  $\exists B \in M(n \times n)$  tale che:  $A \cdot B = B \cdot A = \underline{I}$

Dove  $I$  è la matrice identità  $n \times n$ . Se questo è il caso  $B$  si chiama matrice inversa di  $A$  e si indica  $B = A^{-1}$ .

TEO: Sia  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2)$ . Allora se

$$\underline{a \cdot d - b \cdot c \neq 0} = \det(A) \quad 2 \times 2$$

Allora  $A$  è **invertibile** e si ha che

$$A^{-1} = \frac{1}{\underline{a \cdot d - b \cdot c}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DEF: SIA  $A \in M(1 \times 1) \Rightarrow A = a \in \mathbb{R}$

DEFINISCI  $\det(A) = a$

$$\boxed{n=1}$$

SIA  $A \in M(2 \times 2) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

DEFINISCI  $\det(A) = \underline{a} \cdot \underline{d} - \underline{b} \underline{c}$

SIA  $A \in M(n \times n)$ , CHIAMO  $A_{ij}$  LA MATRICE OBTENUTA RIMUOVENDO DA  $A$  LA RIGA  $i$  E LA COLONNA  $j$

SIA  $A \in M(n \times n)$ , IL DETERMINANTE DI  $A$  È DEFINITO COSÌ

$$\det(A) = (-1)^{i+1} \underline{a_{i1}} \det(\underline{A_{i2}}) + (-1)^{i+2} \underline{a_{i2}} \det(\underline{A_{i3}}) + \dots + (-1)^{i+n} \underline{a_{in}} \det(\underline{A_{in}})$$

$(n-1) \times (n-1)$        $(n-1) \times (n-1)$        $(n-1) \times (n-1)$

$i$  È UN QUALSIASI INDICE DI RIGA E LA

DEFINIZIONE NON DIPENDE DALLA SCELTA DI  $i$

$$\det(A) = (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1j}) + (-1)^{j+2} a_{2j} \det(A_{2j}) + \dots + (-1)^{j+m} a_{mj} \det(A_{mj})$$

DOVE  $j$  È UN QUALSASI INDICE DI COLONNA.

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (-1)^{1+1} a \det(d) + (-1)^{1+2} c \det(b)$$

$$j=1 \quad = (-1)^2 a \cdot d - c \cdot b = a \cdot d - cb$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = a \cdot \det \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \cdot [b \cdot \det(c)] = a \cdot b \cdot c$$

TEO: &  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_m \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_m$

TRIANGOLARE SUPERIORE

$$\begin{pmatrix} a & \alpha & \beta \\ 0 & b & \gamma \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a & d & \beta \\ 0 & b & \gamma \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = a \cdot b \cdot c$$

PROPRIETÀ DEI DETERMINANTI: SIA  $A \in M(n \times n)$ .

1)  $A$  È INVERTIBILE  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

2) SE  $A$  È INVERTIBILE ALLORA  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

3)  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

4)  $\det(A) = \det(A^T)$

5) SE SI MOLTIPLICA UNA RIGA O UNA COLONNA DI  $A$  PER UNO SCALARE  $\mu \in \mathbb{R}$  ALLORA IL DETERMINANTE SI MOLTIPLICA PER LA STESSA QUANTITÀ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 6$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 0 \\ 2 \cdot 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B) = 12 = 2 \cdot \det(A)$$

$$\underline{2 \cdot A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(2 \cdot A) = 24 = \underline{4} \cdot \det(A) = 2^2 \det(A)$$

$$\text{IN GENERALE } \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A) \quad A \in M(n \times n)$$

ESERCIZIO: SIA  $A$  UNA MATRICE ANTI-SIMMETRICA DI DIMENSIONE  $n$  DISPARI  
DIMENSIONE CHE  $\det(A) = 0$

SOLUZIONE:  $A^T = -A$  (ANTI-SIMMETRICA)

$$\left\{ \begin{array}{l} \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^m \det(A) = -\det(A) \\ \parallel \\ \det(A) \end{array} \right\} \Rightarrow \det(A) = -\det(A) \Leftrightarrow \det(A) = 0$$

6) SE SCAMBIO DUE COLONNE O DUE RIGHE DI A  
IL DETERMINANTE CAMBIA SEGNO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 6$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = -6$$

7) SOMMANDO UNA COLONNA CON IL MULTIPLO DI UN'ALTRA  
IL DETERMINANTE NON CAMBIA (E LO STESSO VALE PER  
LE RIGHE)

8) IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE CON UNA COLONNA  
(O RIGA) DI ZERI È ZERO

9) SI CHIAMA MATRICE DEI CO-FATTORI DI A LA MATRICE  
C I CUI ELEMENTI SONO

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

SE A È INVERTIBILE ALLORA

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C^T$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} d \end{pmatrix} = +d \\ C_{21} &= (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} = -b \\ C_{12} &= (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} c \end{pmatrix} = -c \\ C_{22} &= (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} = +a \end{aligned} \right\}$$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ab - cd} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Now  $\hat{=}$  INVERT BLOW

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$



$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\uparrow \\ C_2 - 2C_1}]{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 0 = 0$$