SISTEMI LINEARI

coefficienti — termini noti

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1+\dots+a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

incognite

DOVE $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $\quad i=1,\dots,m$
$\quad j=1,\dots,n$
$b_i \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases}}$$

$a_{11}=2 \quad a_{12}=1 \quad b_1=1$

$a_{21}=1 \quad a_{22}=-1 \quad b_2=0$

DEF: UN INSIEME DI VALORI $(s_1,s_2,\dots,s_n)$ È UNA SOLUZIONE DEL SISTEMA SE SOSTITUENDO $x_i=s_i$ $\forall i$ IL SISTEMA È VERIFICATO.

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=0 \Rightarrow x=y \end{cases}$$

$2y+y=1 \Rightarrow 3y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{3}$

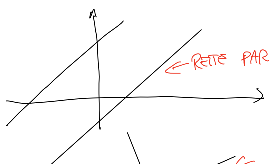
$x=\frac{1}{3}$

IN QUESTO CASO LA SOLUZIONE ESISTE ED È UNICA.

$$\begin{cases} (1)\ ax+by=c_1 \Rightarrow \text{EQUAZIONE DI UNA RETTA NEL PIANO } (x,y) \\ (2)\ cx+dy=c_2 \Rightarrow \text{EQUAZIONE DI UNA RETTA NEL PIANO } (x,y) \end{cases}$$

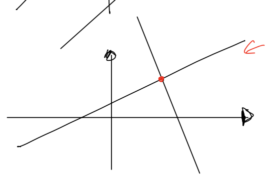
(SE $b \neq 0$ DA (1) RICAVO $by=c_1-ax \Rightarrow \boxed{y=\frac{c_1}{b}-\frac{a}{b}x}$)

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA: LE SOLUZIONI DEL SISTEMA LINEARE SONO TUTTI I PUNTI DI INTERSEZIONE TRA LE DUE RETTE.



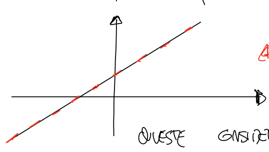
RETTE PARALLELE $\Rightarrow \nexists$ SOLUZIONI

IL SISTEMA È DETTO INCONSISTENTE.



LE RETTE SI INCONTRANO IN UN PUNTO

IN QUESTO CASO IL SISTEMA È CONSISTENTE E LA SOLUZIONE È UNICA



IL SISTEMA È CONSISTENTE E ESISTONO INFINITE SOLUZIONI.

QUESTE CONSIDERAZIONI SI ESTENDONO AL CASO GENERICO DI M EQUAZIONI IN M INCOGNITE

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underset{v}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \underset{b}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \Leftarrow$$

$$\boxed{A \cdot v = b}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$v=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=x \qquad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

$$\boxed{A \cdot x = b}$$

OSS 1: Se $b = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ il sistema si chiama omogeneo

$$A \cdot X = 0$$

ed ammette sempre la soluzione banale $X = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

che però potrebbe essere non-unica

$$A \cdot 0 = 0$$

ESEMPIO: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 6/3 = 2 \end{cases}$ $\quad x_1 + 2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è l'unica soluzione.

$\begin{cases} \frac{7}{10} x_1 + 3x_2 = -5 \\ 2x_1 + 9x_2 = 7 \end{cases}$ da nessuna delle due equazioni riesco a ricavare immediatamente il valore di una delle incognite...

Cerco di portare il sistema in una forma del tipo $\begin{cases} a x_1 + b x_2 = c_1 \\ d x_2 = c_2 \end{cases}$

1) le soluzioni del sistema non cambiano se scambio due equazioni
2) le soluzioni del sistema non cambiano se moltiplico una equazione per una costante
3) le soluzioni del sistema non cambiano se sommo (o sottraggo) una equazione ad un'altra.

ERO (Elementary Row Operations)

OER (Operazioni Elementari sulle Righe)

$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\tilde{A} = (A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \alpha & \dots & - & c_1 \\ 0 & \beta & - & c_2 \\ 0 & 0 & \gamma & c_3 \end{pmatrix}$$

Algoritmo di Gauss: parto dal primo elemento non-nullo a partire da sinistra della prima riga e annullo tutti gli elementi sotto di esso

$R_2 \to R_2 - \frac{3}{2} R_1$ (ERO)

$R_1 = (2 \quad 1 \quad -2 \quad 10)$

$-\frac{3}{2} R_1 = (-3 \quad -\frac{3}{2} \quad +3 \quad -15)$

$R_2 - \frac{3}{2} R_1 = (0 \quad 2 - \frac{3}{2} \quad 2+3 \quad 1-15) = (0 \quad \frac{1}{2} \quad 5 \quad -14)$

$$\Rightarrow \tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} & 5 & -14 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$R_3 - \frac{5}{2} R_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1/2 & 5 & -14 \\ 5 - \frac{5}{2} \cdot 2 & 4 - \frac{5}{2} & 3 + \frac{5}{2} 2 & 4 - \frac{5}{2} \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1/2 & 5 & -14 \\ 0 & \frac{3}{2} & 8 & -21 \end{pmatrix}$$

2) Individuo nella seconda riga a partire da sinistra il primo elemento non-nullo e usando le ERO annullo tutti gli elementi sotto di esso

$$R_3 - 3R_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1/2 & 5 & -14 \\ 0 & \frac{3}{2}-\frac{3}{2} & 8-3\cdot5 & -21+3\cdot14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} & 5 & -14 \\ 0 & 0 & -7 & 21 \end{pmatrix}$$

MATRICE A SCALINI CON 3 ELEMENTI PRINCIPALI (PIVOT)

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 & \leftarrow \quad 2x+2+6=10 \Rightarrow x=1 \\ \frac{1}{2}y + 5z = -14 & \quad \frac{1}{2}y - 15 = -14 \Rightarrow y=2 \\ -7z = 21 \Rightarrow z=-3 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ è l'unica soluzione del sistema

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y+3z=4 \\ 3x+4z=7 \end{cases} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$R_2 - 2R_1 \Rightarrow \tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2-2 & -1-2 & 3-2 & 4-6 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$R_3 - 3R_1 \Rightarrow \tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 3-3 & 0-3 & 4-3 & 7-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$R_3 - R_2 \Rightarrow \tilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ -3y+z=-2 \\ 0\cdot z=0 \end{cases}$$

$\forall z \in \mathbb{R}$ è lecito

QUINDI $\forall$ VALORE DI z HO UNA

SOLUZIONE.

$$z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y = 3 \Rightarrow x = 3 - 2/3 \\ -3y = -2 \Rightarrow y = 2/3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

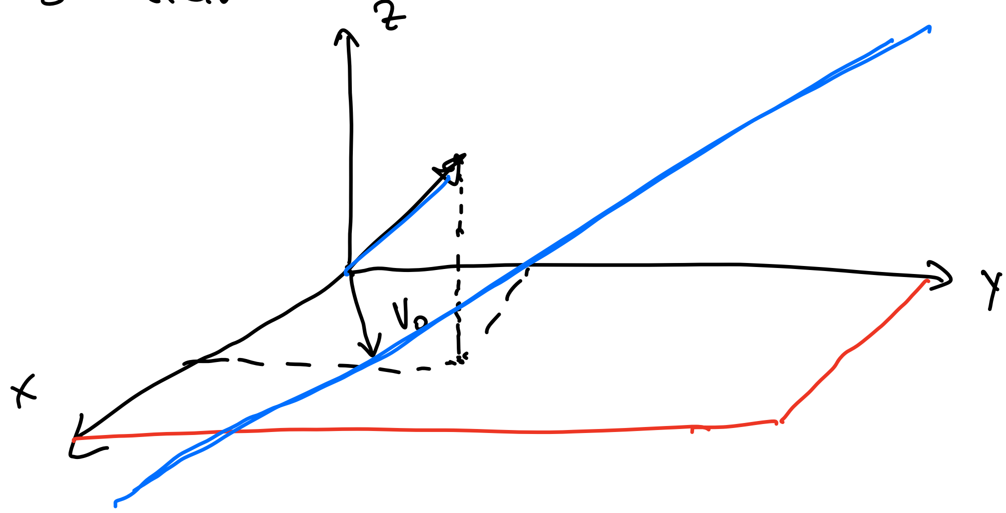
$z = 1 \Rightarrow$ - - - - - - - -

SIA $t \in \mathbb{R}$ PONGO $z = t$ E RICAVO $x(t)$ E $y(t)$

$$\begin{cases} x + y + t = 3 \qquad x + \frac{t+2}{3} + t = 3 \Rightarrow x = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}t \\ -3y + t = -2 \Rightarrow -3y = -2 - t \Rightarrow 3y = t+2 \Rightarrow y = (t+2)/3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{3} - \frac{4}{3}t \\ \frac{2}{3} + \frac{t}{3} \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}}_{= V_0} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -4/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{V_1} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

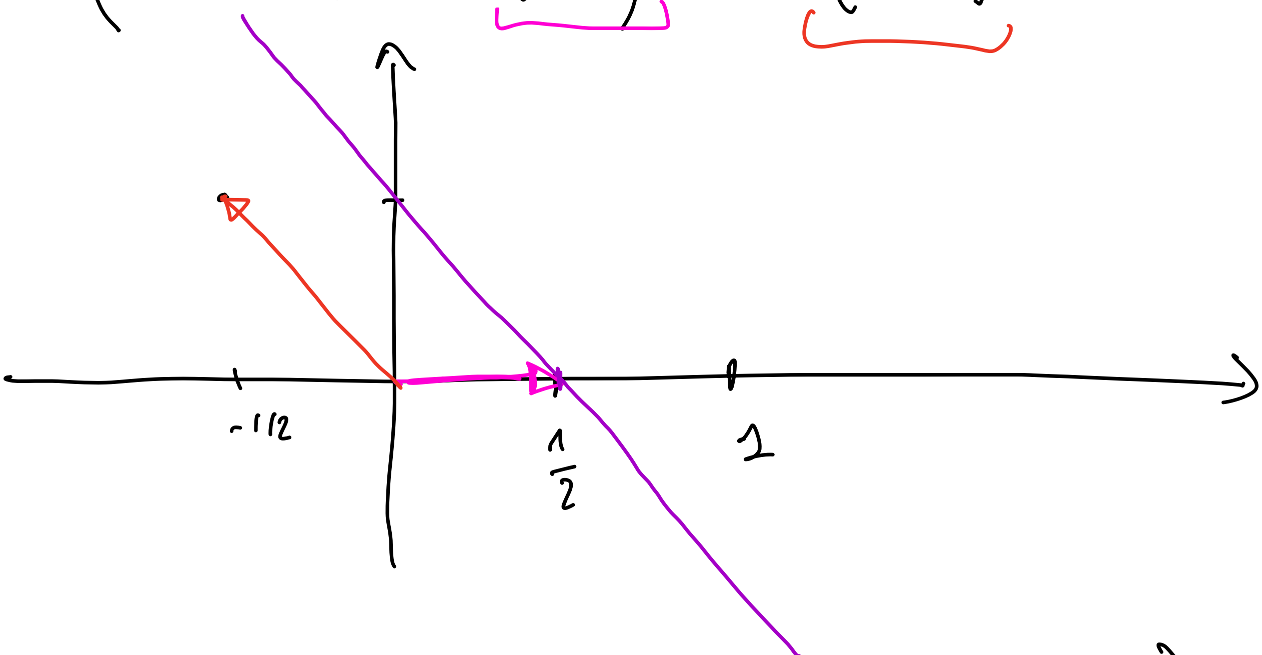
∞^{1} SOLUZIONE



$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 0\cdot y = 0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = (1-t)/2$$

$$y=t$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{t}{2} \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}$$



$$\begin{cases} 2x+y-z=-5 \\ 4x-3y-2z=-3 \\ 8x-y-4z=0 \end{cases} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -1 & -5 \\ 4 & -3 & -2 & -3 \\ 8 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - 2R_1 \Rightarrow \tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -5 \\ 4-4 & -3-2 & -2+2 & -3+10 \\ 8-8 & -1-4 & -4+4 & 0+20 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - 4R_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{-5} & 0 & 7 \\ 0 & -5 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - R_2 \Rightarrow \tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y - z = -5 \\ -5y = 7 \\ \cancel{0 = 13} \end{cases}$$

INCONSISTENTE !

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2 \\ 6x - 2y + 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \Rightarrow R_2 - 2R_1$$
$$R_3 \Rightarrow R_3 - \frac{1}{3}R_1$$

$$\Rightarrow \tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 6-2\cdot 3 & -2+2 & 2-2 & 0-4 \\ 1-\frac{1}{3}\cdot 3 & 0+\frac{1}{3} & -1-\frac{1}{3} & 0-\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

SCAMBIO $R_2 \Leftrightarrow R_3$

$$\tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 1/3 & -4/3\cdot 3 & -2/3\cdot 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

INCONSISTENTE !

SIANO DATI $v_1, \dots, v_k$ VETTORI DI $\mathbb{R}^m$. IL VETTORE $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k$ $c_j \in \mathbb{R}$ SI CHIAMA COMBINAZIONE LINEARE DI $\{v_1, \dots, v_k\}$.

DATO $v \in \mathbb{R}^m$ E DATI $v_1, \dots, v_k$ VETTORI DI $\mathbb{R}^m$ ESISTONO $c_1, \dots, c_k$ COSTANTI REALI TALI CHE

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \quad ?$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\exists\ c_1, c_2$ TALI CHE $\underline{v = c_1 v_1 + c_2 v_2}$?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_1 + 0 \cdot c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -c_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 2 \\ c_1 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \\ 1 \end{pmatrix}$$