$$\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x + (1/2)y - (1/2)z = -1/2 \\ -2x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & -1 & +1 & +1 \end{pmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_1 \Rightarrow$

$$\tilde{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1-\frac{1}{2}2 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ -2 & -1 & +1 & +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & +1 & +1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_1$

$$\tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$z = t \qquad y = s \Rightarrow 2x + s - t = 1 \Rightarrow 2x = 1 + t - s$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}s$

∞^2

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{t}{2} - \frac{s}{2} \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

DEF: DATI VETTORI $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^k$ $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$

$c_1 v_1 + \dots + c_m v_m$ È DETTA UNA COMBINAZIONE LINEARE DI $v_1, \dots, v_m$

DATO $v \in \mathbb{R}^k$ E DATI $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^k$ ESISTONO $c_1, \dots, c_m$ TALI CHE $v = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m$?

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 - c_2 + 0 \cdot c_3 = 1 \\ 0 \cdot c_1 + c_2 + 0 \cdot c_3 = -1 \\ c_1 + 0 \cdot c_2 + c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = 1 \\ c_2 = -1 \\ c_1 + c_3 = 0 \end{cases}$$

DEF: SIANO $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^k$ CON $m \leq k$. SI DICE CHE L'INSIEME DEI VETTORI $\{v_1, \dots, v_m\}$ È LINEARMENTE INDIPENDENTE (CHE I VETTORI $\{v_1, \dots, v_m\}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI) SE

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$$

$m=2$ SUPPONIAMO CHE $\exists$ c_1, c_2 CON $c_2 \neq 0$ TALI CHE

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0 \Rightarrow c_2 v_2 = -c_1 v_1$$
$$\Rightarrow v_2 = -\frac{c_1}{c_2} v_1$$

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0 \quad c_3 \neq 0$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{1}{c_3}\left(-c_1 v_1 - c_2 v_2\right)$$

$\mathbb{R}^3, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow c_1 = 0, \; c_2 = 0, \; c_3 = 0$

SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

OSS: IL VETTORE $v = 0$ È SEMPRE LINEARMENTE DIPENDENTE

$\mathbb{R}^3, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_2 = 2 v_1 \qquad v_1 - \frac{1}{2} v_2 + 0 \cdot v_3 = 0$

DEF: $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^k$ $m \leq k$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE E SOLO SE IL SISTEMA

$$V \cdot c = 0, \quad V = (v_1 | v_2 | \dots | v_m)$$

HA SOLO LA SOLUZIONE NULLA $c = 0$

$$V \cdot c = (v_1 | v_2 | \dots | v_m) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m = 0$$

$$\Leftrightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad V \cdot c = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ -c_2 = 0 \end{cases}$$

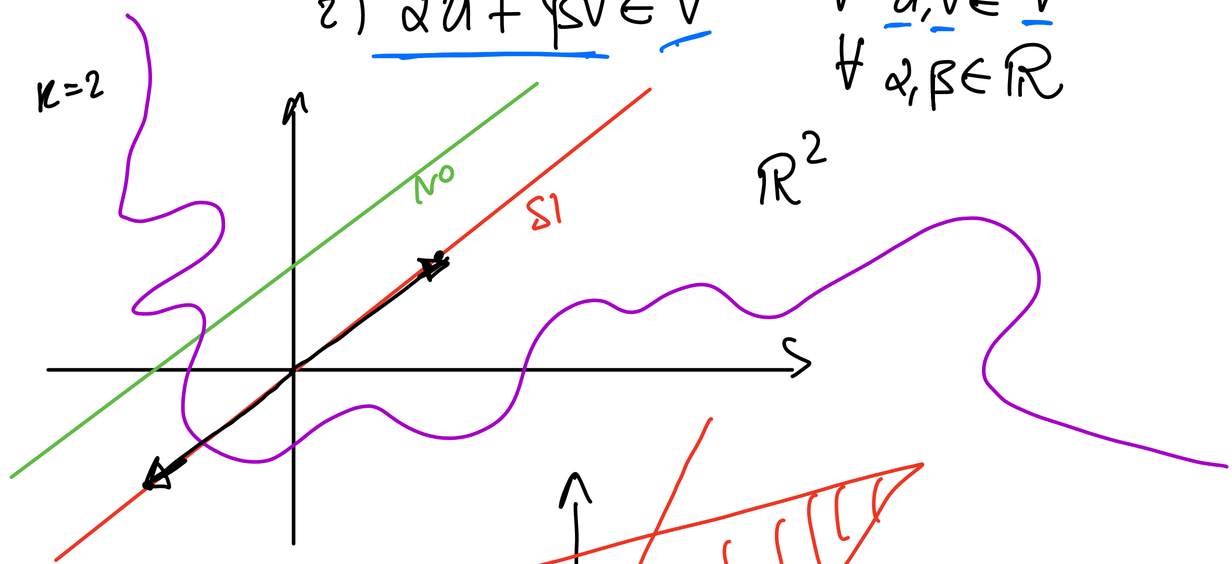
SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

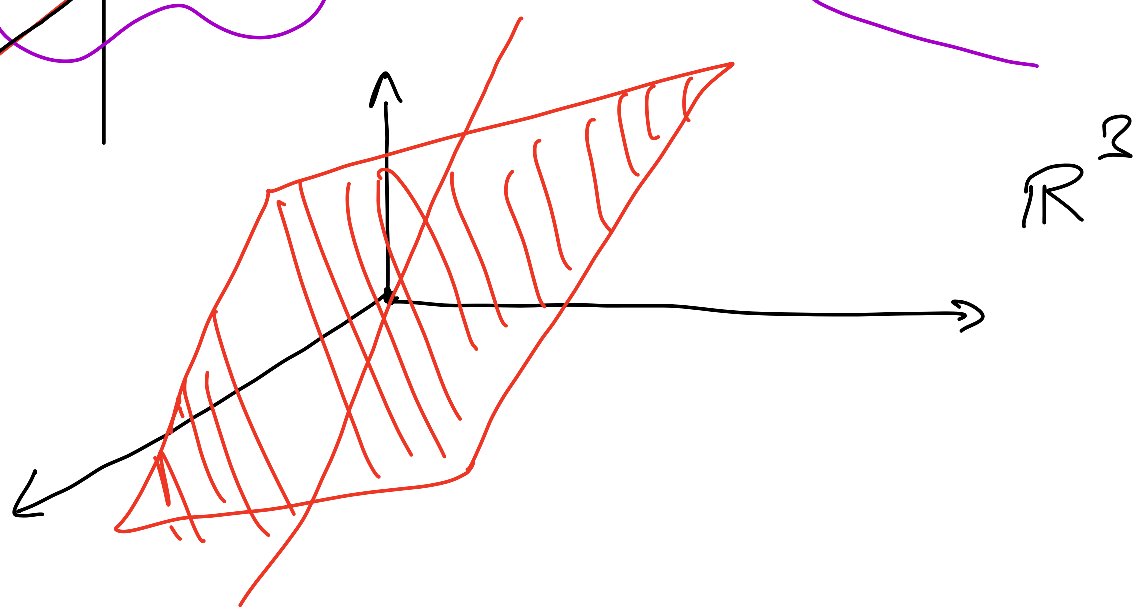
$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ -c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

DEF: SIA $V \subseteq \mathbb{R}^k$, $V \neq \emptyset$. SI DICE CHE V È UN SOTTOSPAZIO LINEARE DI $\mathbb{R}^k$ SE:

1) $0 \in V$.

2) $\alpha u + \beta v \in V \quad \forall\, u, v \in V \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$





DEF: DATO $V \subseteq \mathbb{R}^k$, V SOTTOSPAZIO LINEARE UN INSIEME DI VETTORI $\{v_1, \dots, v_n\}$ DI V SI CHIAMA SISTEMA DI GENERATORI DI V SE $\forall\, u \in V$ ALLORA

$$u = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m$$

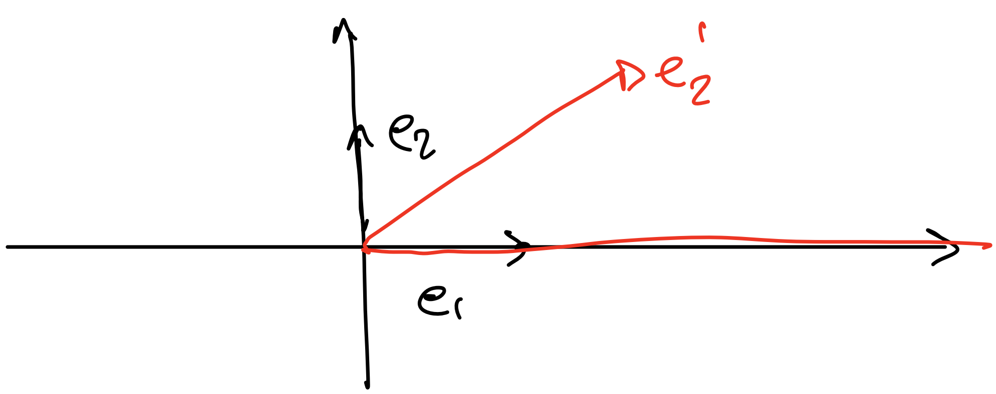
DEF: DATO $V \subseteq \mathbb{R}^k$, V SOTTOSPAZIO LINEARE E DATO $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$ DI VETTORI DI V ALLORA $\mathcal{B}$ È DETTO UNA BASE DI V SE

1) $\mathcal{B}$ È UN SISTEMA DI GENERATORI PER V

2) I VETTORI $\{v_1, \dots, v_m\}$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI.

$$\mathbb{R}^2 \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



IN $\mathbb{R}^k$ L'INSIEME DI VETTORI $\{e_1, \dots, e_k\}$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots, \quad e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

SI CHIAMA BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^k$

PROPRIETÀ: DATO $V \subseteq \mathbb{R}^k$, V SOTTOSPAZIO VETTORIALE ALLORA

1) TUTTE LE BASI DI V HANNO LO STESSO NUMERO DI ELEMENTI
2) DATO IL PUNTO 1) SI CHIAMA DIMENSIONE DEL SOTTOSPAZIO E SI INDICA CON $\dim(V)$ IL NUMERO DI ELEMENTI DI UNA SUA QUALSIASI BASE
3) SE $V \subset \mathbb{R}^k$ ALLORA $\dim(V) < k$
4) SE $V = \mathbb{R}^k$ ALLORA $\dim(V) = k$

DEF: SIANO $v_1, \dots, v_m$ VETTORI DI $\mathbb{R}^k$ LINEARMENTE INDIPENDENTI SI CHIAMA SPAZIO GENERATO DA $v_1, \dots, v_m$ L'INSIEME DI TUTTE LE POSSIBILI COMBINAZIONI LINEARI DI $v_1, \dots, v_m$ E SI INDICA CON $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$

$$\langle v_1, \dots, v_m \rangle = \left\{ v \in \mathbb{R}^k \;\middle|\; v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_m v_m \right\}$$

E TALE INSIEME SI PUÒ DIMOSTRARE FACILMENTE ESSERE UN SOTTOSPAZIO LINEARE DI $\mathbb{R}^k$

AVENDO RICHIESTO CHE $v_1, \dots, v_m$ SIANO LINEARMENTE

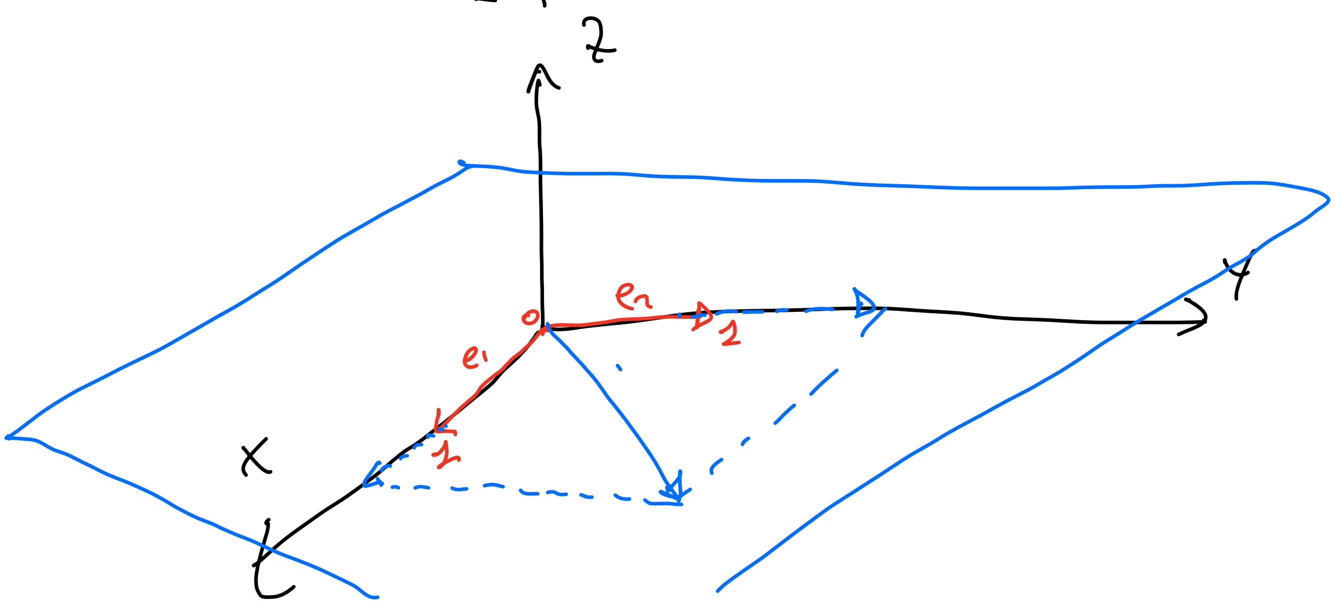
INDIPENDENTI SI HA CHE

$$\dim\left(\langle v_1, \dots, v_m \rangle\right) = m$$

ESEMPIO: $\mathbb{R}^3$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

= PIANO CARTESIANO X − Y



ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - c_2 + 0 c_3 \\ 2c_2 + c_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

DEF: SIA $A \in \mathcal{M}(m \times n)$ SI CHIAMA RANGO DI A E SI INDICA CON $r(A)$ IL NUMERO MASSIMO DI COLONNE LINEARMENTE INDIPENDENTI.

TEO: IL RANGO DI UNA MATRICE COINCIDE CON IL NUMERO MASSIMO DI RIGHE LINEARMENTE INDIPENDENTI

COROLLARIO: $\forall A \in \mathcal{M}(m \times n) \Rightarrow 0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$

OSSERVAZIONE: $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$

SE $A \neq 0 \Rightarrow 1 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$

OSSERVAZIONE: IL RANGO DI A COINCIDE CON LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO GENERATO DALLE COLONNE OPPURE CON LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO GENERATO DALLE RIGHE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r(A) = 2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$r(A) \nearrow 1$, $\searrow 2$ $\qquad r(A) = 1$

REGOLA DI KRONECKER SIA $A \in \mathcal{M}(m \times n)$, $A \neq 0$

QUINDI $1 \leq r(A) \leq \min(m,n)$. ALLORA $r(A) = r$ SE

1) $\exists$ UNA SOTTOMATRICE QUADRATA B DI DIMENSIONE $r \times r$ TALE CHE $\det(B) \neq 0$

2) TUTTE LE SOTTOMATRICI DI DIMENSIONE $(r+1)\times(r+1)$ OTTENUTE DA B AGGIUNGENDO UNA RIGA (O UNA COLONNA) HANNO DETERMINANTE NULLO.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad 4 \times 3$$

$$1 \leq r(A) \leq 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B) = 0 \cdot (-5) - 9 = -9 \neq 0$$

B 2×2 : $\det(B) \neq 0$

$\Rightarrow r(A) \geq 2$

ANDIAMO A CONSIDERARE TUTTE LE SOTTOMATRICI 3×3

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & - & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(C) = \dots = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(D) = \dots = 0$$

$$r(A) = 2$$

CONSEGUENZA DI KRONECKER: SIA $A \in \mathcal{M}(n \times n)$

ALLORA $r(A) = n \iff \det(A) \neq 0$

OSSERVAZIONE: LE ERO NON CAMBIANO IL RANGO DI UNA MATRICE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$