Il VaR per la misurazione dei rischi di mercato

Prof. Ugo Pomante

Università di Roma “Tor Vergata”

Agenda

- I rischi di mercato
- I modelli VaR
- L'approccio varianze-covarianze
- La stima della volatilità
- Il livello di confidenza
- Il VaR di portafoglio
- Il mapping
- Limiti dell'approccio varianze-covarianze

I rischi di mercato

- Rischi di mercato: rischi connessi all'attività di negoziazione di valori mobiliari (*trading*)
- Def. ⇨ *rischio di variazioni del valore di mercato di uno strumento o di un portafoglio di strumenti finanziari connesse a variazioni inattese dei fattori di mercato* (prezzi azionari, tassi di interesse, tassi di cambio e volatilità di tali variabili)
- La distinzione fra portafoglio di trading e portafoglio immobilizzato deriva da vigilanza e normativa contabile

I rischi di mercato

- Rischi di mercato ⇨ rilevanza crescente in seguito a:
  - titolarizzazione
  - diffusione “mark-to-market”
  - episodi di crisi (Barings, LTCM, ecc.)
  - requisiti patrimoniali Basilea 1993
- Tipologie
  - Rischio di interesse
  - Rischio di cambio
  - Rischio azionario
  - Rischio merci
  - Rischio volatilità

I rischi di mercato

- Approccio tradizionale alla misurazione fondato su valori nominali
- Problemi:
  - Non si tiene in considerazione il diverso valore di mercato delle posizioni di rischio
  - Impossibilità di cogliere il diverso grado di sensibilità di posizioni differenti a variazioni dei fattori di mercato
  - Non si tengono in considerazione le condizioni di volatilità e di correlazione dei prezzi/tassi

I rischi di mercato

Valore nominale e di mercato di due posizioni azionarie

Titolo azionario	A	B
Valore nominale (€)	10	10
Prezzo di mercato (€)	100	10
Dimensione posizione (numero di titoli)	100	100
Valore nominale posizione (€)	1.000	1.000
Valore di mercato posizione (€)	10.000	1.000

I rischi di mercato

- Questi problemi emergono in modo rilevante per negoziazione opzioni (diversa sensibilità in funzione di prezzo esercizio)
- Primi due problemi risolti mediante introduzione mark to market e misure di sensibilità:
  - Duration
  - Basis point value
  - Beta
  - Delta
  - Gamma
  - ....

I rischi di mercato

Valore nominale e *basis point value* di due posizioniobbligazionarie

Titolo obbligazionario	BTP 5 anni	BTP 10 anni
Valore nominale (€)	100	100
Prezzo di mercato (€)	100	100
Dimensione posizione (€ mln)	10	10
Duration modificata (anni)	3,5	7
Valore nominale posizione (€ mln)	10	10
Valore di mercato posizione (€ mln)	10	10
Basis point value (€)	3.500	7.000

I rischi di mercato

- Problemi residui:
  - Utilizzo di misure diverse per posizioni diverse ⇨ linguaggio diverso ostacola comunicazione orizzontale e verticale
  - Le misure di sensibilità non sono “additive” ⇨ impossibile ottenere una misura di rischio complessiva
  - Mancata considerazione del diverso grado di volatilità e correlazione dei differenti fattori di mercato

I rischi di mercato

Valore di mercato, basis point value e volatilità

Titolo obbligazionario	BTP 5 anni	BTP anni
Valore nominale (€)	100	100
Prezzo di mercato (€)	100	100
Dimensione posizione (€ mln)	20	10
Duration modificata	3,5	7
Valore nominale (€)	20	10
Valore di mercato posizione (€)	20	10
Basis points value (€)	7000	7000
Volatilità tasso di rendimento	3%	2%

I modelli VaR

- Necessità misura di rischio che:
  - Rifletta il diverso valore di mercato delle posizioni di rischio
  - Rifletta il diverso grado di sensibilità delle posizioni alle variazioni dei fattori di mercato
  - Rifletta il diverso grado di volatilità dei fattori di mercato
  - Consenta di aggregare i rischi di posizioni diverse
  - Agevoli comunicazione verticale e orizzontale

Value at Risk (VaR) o Capital at Risk (CaR)

I modelli VaR

- *Quesito: qual è la perdita massima che potrebbe essere subita nel corso di un certo orizzonte temporale, tale che vi sia una probabilità molto bassa, per esempio pari all'1%, che la perdita effettiva risulti superiore a tale importo?*
- Definizione di rischio basata su 3 elementi:
  - la massima perdita potenziale che una posizione può subire,
  - con un certo livello di confidenza,
  - in un determinato orizzonte temporale

$$\Pr\left(L > VaR\right) = 1 - c$$

I modelli VaR

- Diversi approcci per la misurazione del VaR:
  - Varianze-covarianze (parametrico):
    - Delta Normal
    - Asset Normal
  - Simulazioni:
    - Storiche
    - Ibrido
    - Monte Carlo

I modelli VaR

- Diverse applicazioni dei modelli VaR:
  - Controllo dei rischi ⇨ limiti
  - Misurazione delle redditività corrette per il rischio ⇨ RAPM
  - *Pricing*
  - Allocazione del capitale

L’approccio varianze-covarianze

- Il VaR di una posizione è stimato come prodotto di tre elementi:
  - Il valore di mercato della posizione (VM)
  - la sensibilità del valore di mercato della posizione a variazioni del fattore di mercato (δ)
  - la potenziale variazione sfavorevole del fattore di mercato, ottenuta come prodotto fra:
    - la volatilità stimata di tale fattore di mercato (σ)
    - un fattore scalare α corrispondente al livello di confidenza desiderato

$$VaR_i = VM_i \cdot \delta_i \cdot \sigma_i \cdot \alpha$$

L'approccio varianze-covarianze

Esempio:

- BTP decennali per nominali €1mln
  - $P_{\text{tel quel}}$ = 105
  - DM = 7 anni
  - $\sigma_{\text{rend.gg.}}$ = 15 b.p. (0,15%)
  - α = 2,326 (c = 99%)

$$VaR_{BTP} = 1.050.000 \cdot 7 \cdot 0{,}15\% \cdot 2{,}326 = 25.644{,}15$$

La stima della volatilità

Tre principali criteri alternativi

- Volatilità storica

Backward looking

- Volatilità implicita

Option prices: forward looking

- Modelli Garch(econometrici)

Volatility changes over time ⇨autoregressive

La stima della volatilità

- La volatilità storica $$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=t-n}^{t-1}\left(R_i - \overline{R}\right)^2}{n-1}}$$
- Ipotesi media nulla $$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=t-n}^{t-1} R_i^{\ 2}}{n-1}}$$

La stima della volatilità

- Volatilità storica
- Problemi:
  - definizione dell'orizzonte temporale storico ⇨ orizzonte maggiore = maggior contenuto informativo e minor aggiornamento dati
  - definizione dell'orizzonte temporale futuro
- Due criteri alternativi:
  - Medie mobili semplici
  - Medie mobili esponenziali

La stima della volatilità *(segue)*

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(R_i - \overline{R})^2}{n-1}}$$

Variazioni mensili dell'indice Morgan Stanley Italia (10/96-10/98)

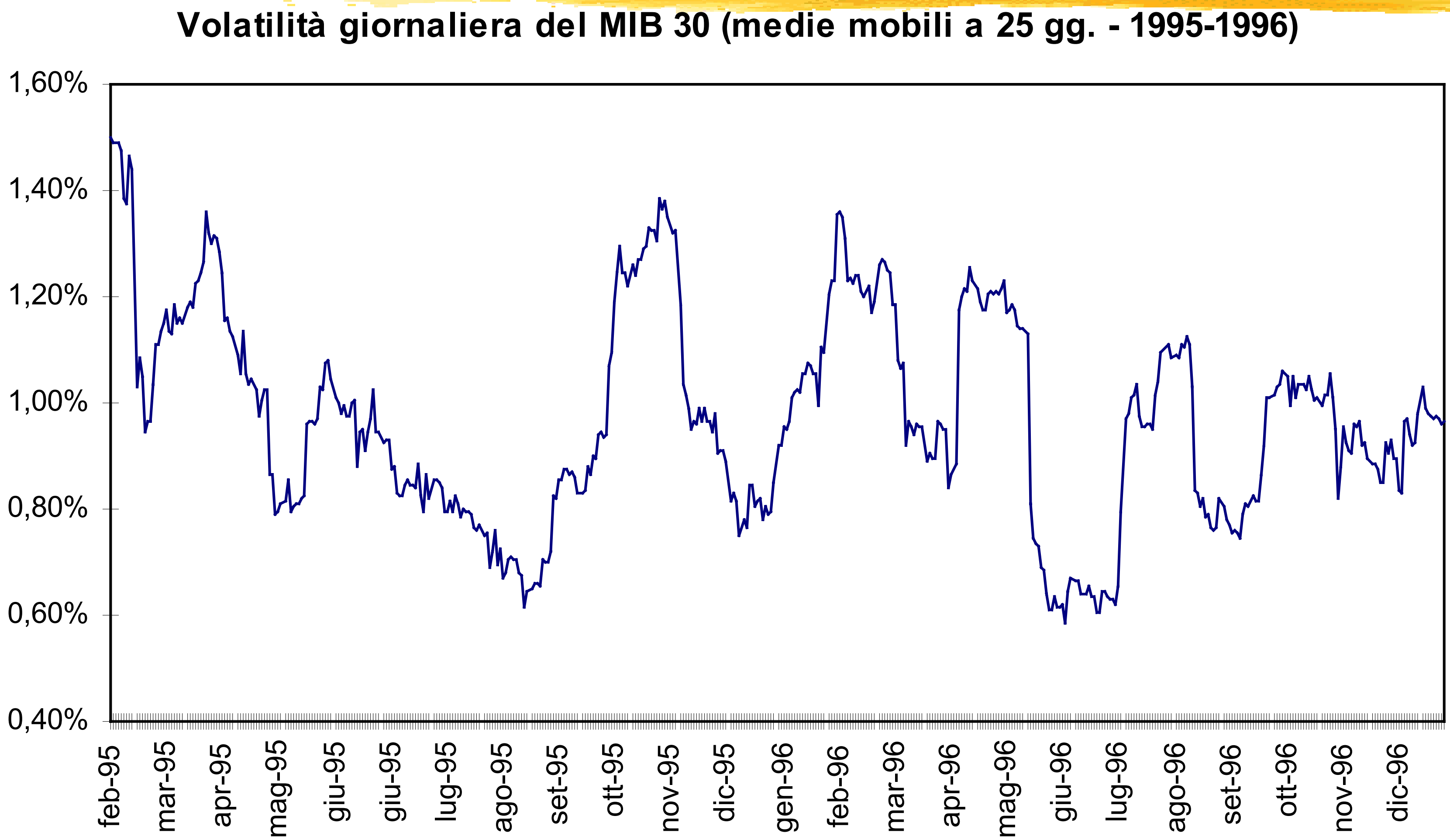
01/10/96	6,74%	*01/10/97*	6,87%
01/11/96	-5,38%	*01/11/97*	-3,20%
01/12/96	6,92%	*01/12/97*	4,05%
01/01/97	0,89%	*01/01/98*	7,68%
01/02/97	14,42%	*01/02/98*	11,27%
01/03/97	-3,76%	*01/03/98*	4,84%
01/04/97	-1,93%	*01/04/98*	20,14%
01/05/97	5,34%	*01/05/98*	-7,65%
01/06/97	-1,47%	*01/06/98*	1,86%
01/07/97	10,66%	*01/07/98*	1,33%
01/08/97	7,76%	*01/08/98*	3,07%
01/09/97	-2,37%	*01/09/98*	-16,69%

Deviazione standard = 7,77%

La stima della volatilità

- Medie mobili semplici
  - Una media mobile è una media relativa a un numero fisso di dati che "slittano" nel tempo: il passaggio del tempo fa sì che il dato più lontano venga sostituito da quello più recente.
  - Problema: "echo effect"

Esempio medie mobili semplici



La stima della volatilità

Exponentially weighted moving average (EWMA)

x_t = rendimento del giorno t

λ = decay factor (maggiore λ, maggiore persistenza, minore “decay”)

$$\frac{\lambda^0 x_{t-1} + \lambda x_{t-2} + \lambda^2 x_{t-3} + \lambda^3 x_{t-4} + \ldots + \lambda^{n-1} x_{t-n}}{1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \ldots + \lambda^{n-1}} \qquad 0 < \lambda < 1$$

$$(1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} x_{t-i}$$

Stima volatilità

- Stima volatilità con EWMA

$$\sigma_t = \sqrt{(1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}\left(x_{t-i}-\bar{x}\right)^2}$$

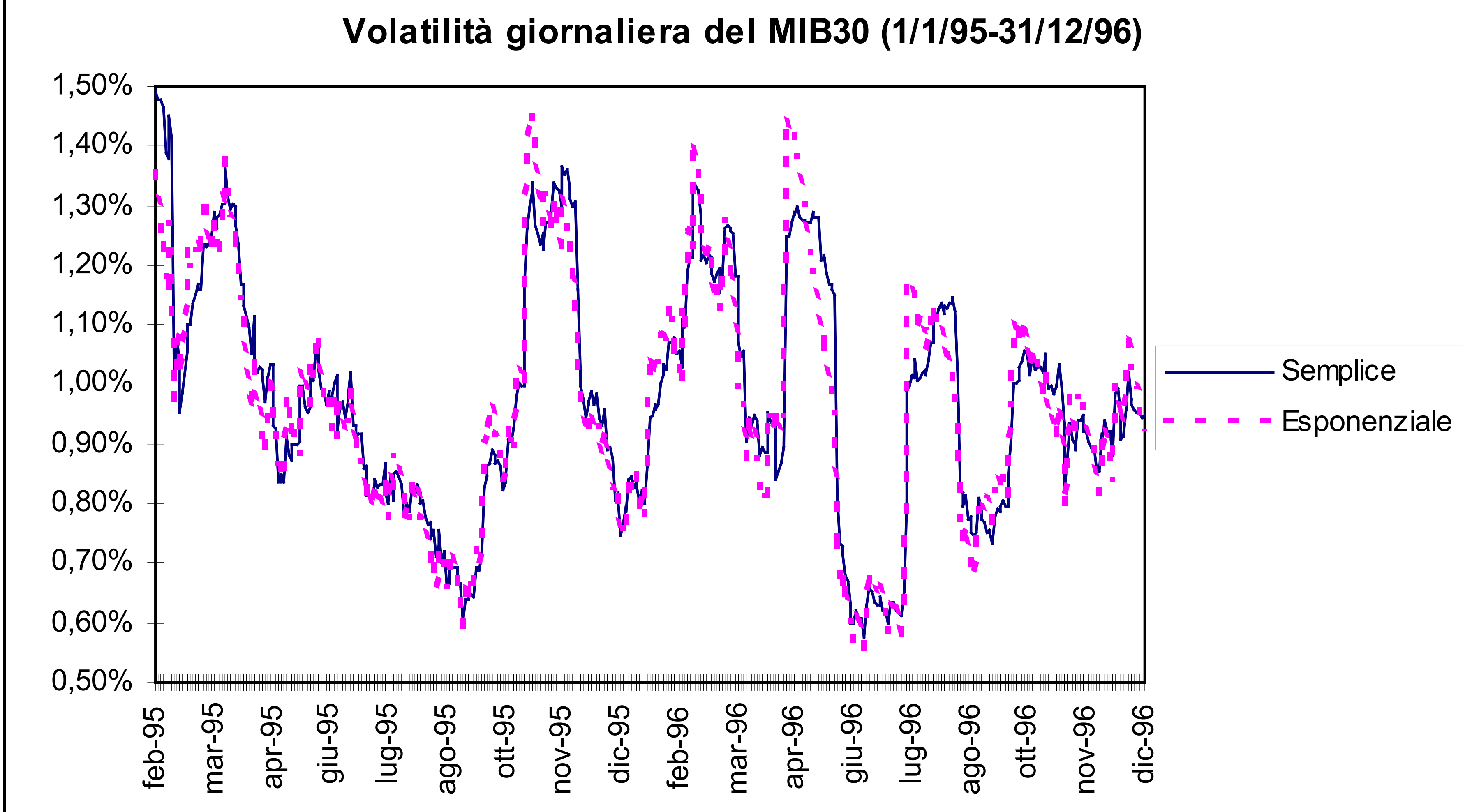
- Se ipotesi rendimento medio = 0

$$\sigma_t = \sqrt{(1-\lambda)\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}\left(x_{t-i}\right)^2}$$

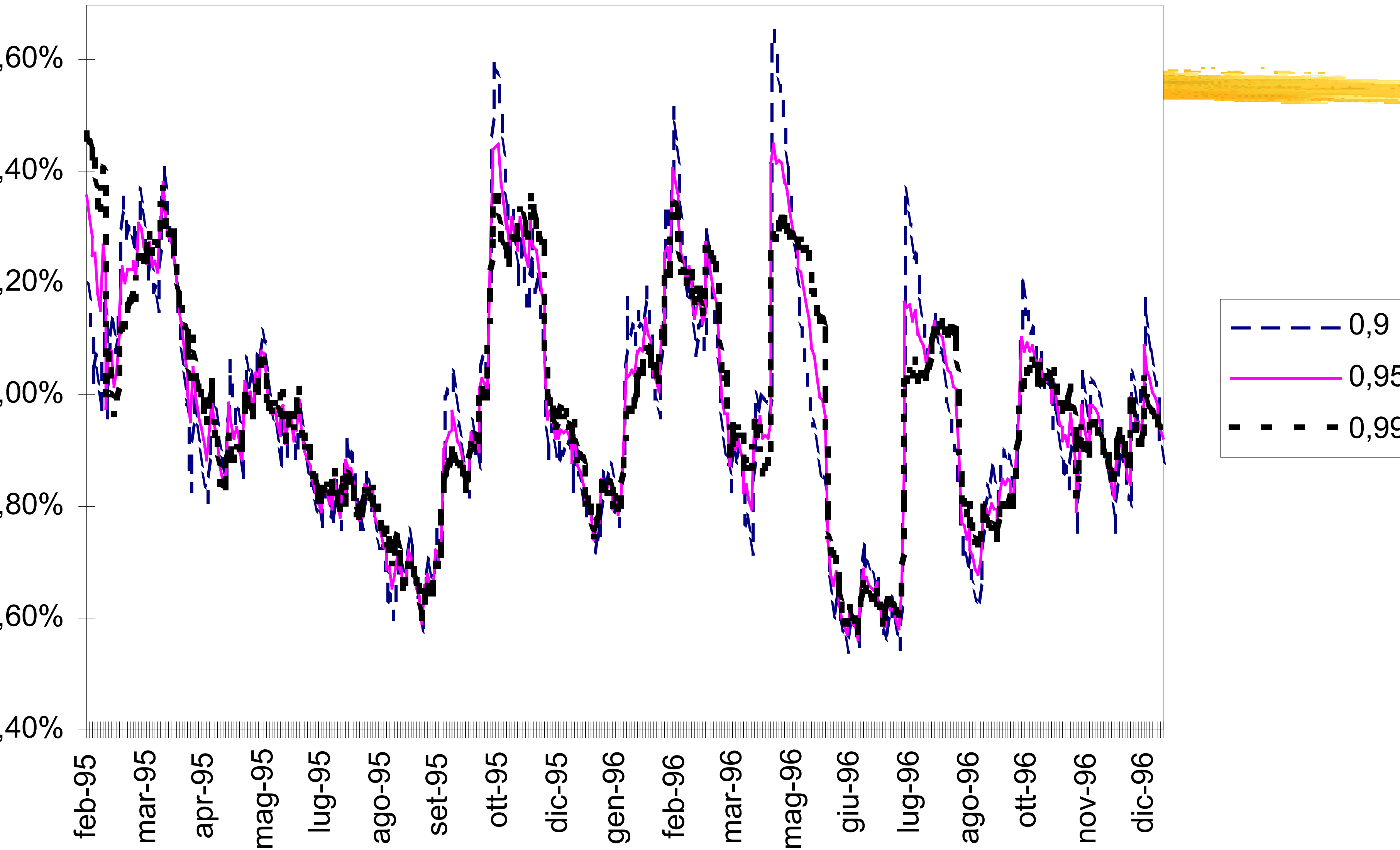
Stima volatilità

- Le osservazioni passate ricevono un peso inferiore a quelle recenti
- Maggiore è lambda, minore è la rapidità con la quale le osservazioni “perdono peso” con il passare del tempo
- Maggiore lambda = minore decay
- Se lambda = 1 ⇨ media mobile semplice

Esempio stima volatilità EWMA



Volatilità giornaliera del MIB 30 con diversi decay factor



La stima della volatilità

- I modelli GARCH ⇨ generalized autoregressive conditional heteroscedasticity
  - riconoscono che la varianza “varia” nel tempo
  - modellano la volatilità in modo autoregressivo
  - la varianza al tempo t è stimata sulla base di 2 componenti: la varianza al tempo t-1 e lo schock di mercato relativo a t-1

La stima della volatilità

- Modello Garch (p,q)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-2}^2 + \ldots + \beta_q \sigma_{t-q}^2$$

- Modello Garch (1,1):
  - la varianza al tempo *t* è funzione di tre fattori
    - una costante, la quale non dovrebbe risultare significativamente diversa da zero
    - la previsione della varianza effettuata in t-1
    - l'errore di previsione

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

La stima della volatilità

- La volatilità implicita
  - Ricavo dal valore di mercato delle opzioni la volatilità “attesa” dal mercato
  - Tipicamente si utilizzano i prezzi delle opzioni at the money e si segue un processo iterativo
    - (1) scelta di un modello di pricing
    - (2) calcolo del valore teorico
    - (3) modifica valore volatilità fino a quando il prezzo teorico non coincide con quello di mercato

La stima della volatilità

- Problemi volatilità implicita
  - non esistono opzioni quotate per tutte le variabili finanziarie
  - possibilità mercato opzioni poco liquido o premi per il rischio di controparte
  - problema modello teorico di pricing: deve essere quello adottato dagli operatori

- Volatilità implicita poco utilizzata per RM

L’orizzonte temporale

- La scelta dell’orizzonte temporale di riferimento
  - Fattore soggettivo ⇨ holding period
  - Fattore oggettivo ⇨ liquidità posizione (liquidità mercato e dimensione posizione)
  - E’ comunque possibile fondarsi su stime di volatilità giornaliera se ipotesi indipendenza seriale dei rendimenti dei fattori di mercato

$$\sigma_T = \sigma_G \sqrt{T}$$

Una verifica dell'ipotesi di indipendenza seriale (1/1/95-31/12/96)

	Volatilità giornaliera	*Volatilità settimanale*	*Volatilità mensile*
		MIB 30	
EFFETTIVA	1,02%	2,64%	6,01%
STIMATA	-	2,28%	4,78%
ERRORE	-	0,37%	1,24%
		S&P 500	
EFFETTIVA	0,63%	1,40%	2,40%
STIMATA	-	1,40%	2,94%
ERRORE	-	0,00%	-0,54%
		CAC 40	
EFFETTIVA	0,96%	2,07%	4,00%
STIMATA	-	2,14%	4,49%
ERRORE	-	-0,07%	-0,50%
		Nikkei	
EFFETTIVA	1,23%	2,68%	6,30%
STIMATA	-	2,75%	5,76%
ERRORE	-	-0,07%	0,54%
		FTSE 100	
EFFETTIVA	0,61%	1,52%	5,16%
STIMATA	-	1,35%	2,84%
ERRORE	-	0,16%	2,31%

Il livello di confidenza

Il problema del livello di confidenza

- La deviazione standard è una misura di variabilità media ⇨ non racchiude tutte le possibili variazioni del fattore di mercato
- Occorre definire un livello probabilistico (es. 99%) che racchiude la gamma di eventi considerati
- Esempio: posizione lunga azionaria sul MIB 30

Rendimenti storici giornalieri del MIB 30 da1/6/98 a 16/10/98

(100 gg.)

⇩

In 12 giorni su 100 le perdite sarebbero state superiori alla deviazione standard

La perdita max. sarebbe stata 4 volte superiore alla deviazione standard

Data	Rt $Ln(P_t/P_{t-1})$	Data	Rt $Ln(P_t/P_{t-1})$	Data	Rt $Ln(P_t/P_{t-1})$	Data	Rt $Ln(P_t/P_{t-1})$
1-giu-98	0,01%	6-lug-98	0,47%	10-ago-98	-0,58%	14-set-98	2,03%
2-giu-98	0,21%	7-lug-98	-0,23%	11-ago-98	-1,32%	15-set-98	0,77%
3-giu-98	-0,96%	8-lug-98	1,01%	12-ago-98	1,42%	16-set-98	0,75%
4-giu-98	1,11%	9-lug-98	-0,67%	13-ago-98	-0,86%	17-set-98	-2,58%
5-giu-98	1,72%	10-lug-98	0,50%	14-ago-98	-1,14%	18-set-98	0,12%
8-giu-98	0,17%	13-lug-98	0,07%	17-ago-98	1,95%	21-set-98	0,37%
9-giu-98	0,24%	14-lug-98	1,06%	18-ago-98	1,60%	22-set-98	0,56%
10-giu-98	-0,55%	15-lug-98	-0,24%	19-ago-98	-0,29%	23-set-98	3,48%
11-giu-98	-1,60%	16-lug-98	0,78%	20-ago-98	-0,59%	24-set-98	-2,22%
12-giu-98	0,39%	17-lug-98	0,23%	21-ago-98	-0,95%	25-set-98	0,19%
15-giu-98	-2,01%	20-lug-98	-0,22%	24-ago-98	0,64%	28-set-98	0,38%
16-giu-98	0,98%	21-lug-98	-1,62%	25-ago-98	0,43%	29-set-98	0,03%
17-giu-98	1,78%	22-lug-98	-0,09%	26-ago-98	-0,80%	30-set-98	-3,10%
18-giu-98	-0,07%	23-lug-98	-2,11%	27-ago-98	-3,91%	1-ott-98	-3,06%
19-giu-98	-0,52%	24-lug-98	0,09%	28-ago-98	-1,49%	2-ott-98	1,63%
22-giu-98	0,24%	27-lug-98	0,57%	31-ago-98	-7,04%	5-ott-98	-1,41%
23-giu-98	1,46%	28-lug-98	-1,50%	1-set-98	3,79%	6-ott-98	-0,40%
24-giu-98	1,19%	29-lug-98	-0,45%	2-set-98	-0,38%	7-ott-98	-1,42%
25-giu-98	-0,32%	30-lug-98	1,56%	3-set-98	-0,83%	8-ott-98	-1,16%
26-giu-98	0,35%	31-lug-98	-1,97%	4-set-98	-0,86%	9-ott-98	2,57%
29-giu-98	0,47%	3-ago-98	-0,74%	7-set-98	2,51%	12-ott-98	1,34%
30-giu-98	-0,41%	4-ago-98	-3,69%	8-set-98	2,45%	13-ott-98	-0,29%
1-lug-98	1,29%	5-ago-98	0,86%	9-set-98	-1,70%	14-ott-98	1,07%
2-lug-98	-0,19%	6-ago-98	0,76%	10-set-98	-2,62%	15-ott-98	4,09%
3-lug-98	0,47%	7-ago-98	-0,02%	11-set-98	2,90%	16-ott-98	0,85%

Media	*-0,03%*
Deviazione standard	*1,65%*
Asimmetria	*-0,69*
Curtosi	*2,87*
Numero di giorni in cui ASS(Rt) > Dev. Std.	*23*
Numero di gorni in cui Rt < - (Dev.Std.)	*12*
Max	*4,09%*
Min	*-7,04%*

Il livello di confidenza

- Soluzione: ipotesi di distribuzione normale dei rendimenti dei fattori di mercato

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\exp\left[-\left(\frac{1}{2\sigma^{2}}\right)\cdot\left(x-\mu\right)^{2}\right]$$

- x = rendimento del fattore di mercato
- μ = media del rendimento del fattore di mercato
- σ = deviazione standard del rendimento del fattore di mercato

Il livello di confidenza

- Se vale questa ipotesi, è possibile calcolare la probabilità che la variazione del fattore di mercato sia contenuta in un intervallo compreso fra μ + o - un certo multiplo di σ

$$\Pr ob\left[x < (\mu + \alpha\sigma)\right] = \int_{-\infty}^{\mu+\alpha\sigma} f(x)dx = \Pr ob(Z < \alpha) = 1 - c$$

- Esempi:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]dx = 0{,}6826 = 68{,}26\% \\ \displaystyle\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]dx = 0{,}9544 = 95{,}44\% \end{cases}$$

Il livello di confidenza

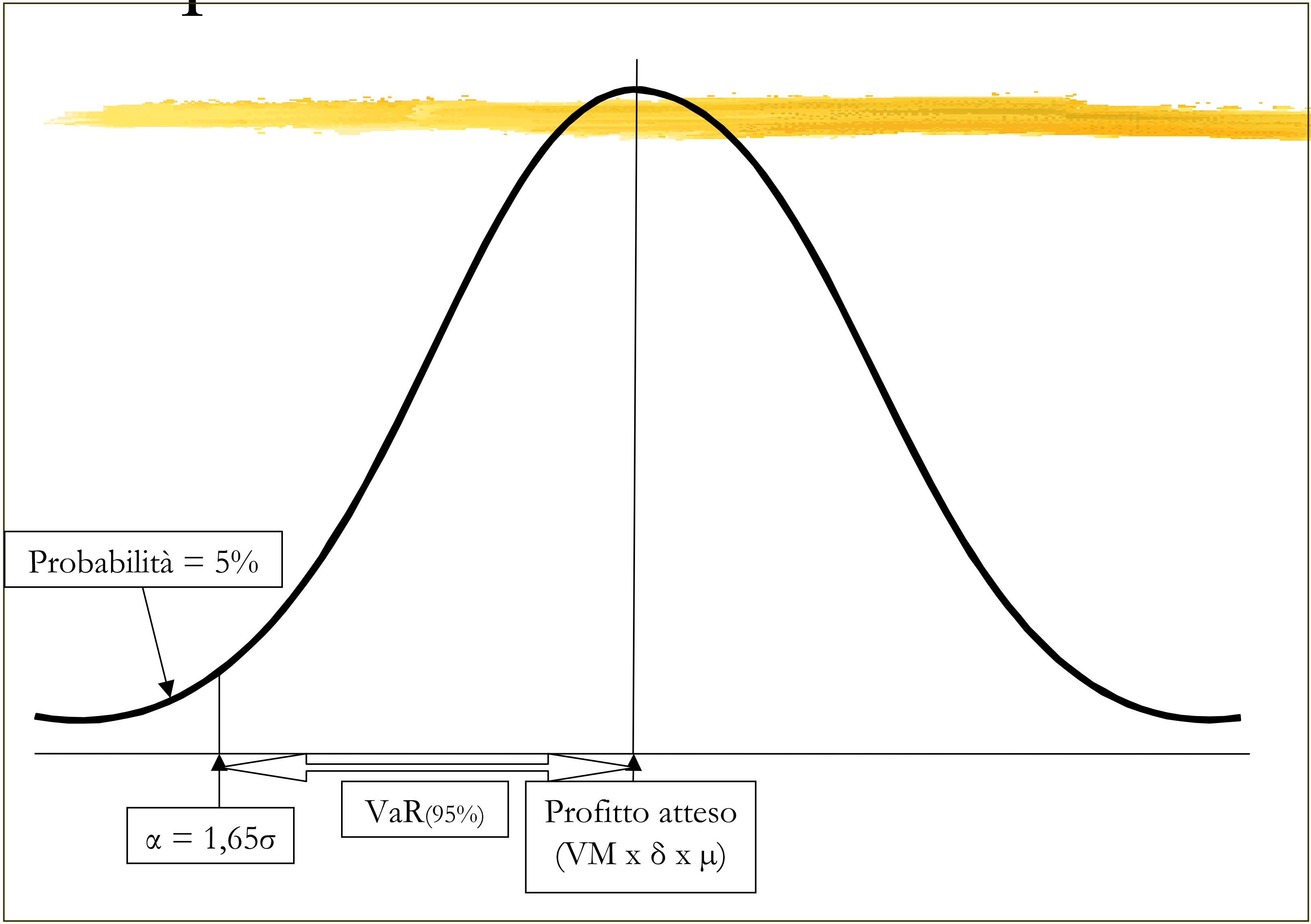
- Considerando un multiplo pari a 2 volte σ si trascura il 5% circa (4,56%) dei possibili eventi
- In realtà solo metà di questi eventi rappresentano perdite ⇨ 2,28%

$$1 - c = \int_{-\infty}^{\mu+2\sigma} f(x)dx = \Pr ob(Z < 2) = 2{,}28\%$$

⇨ livello di confidenza = 97,72%

$$\Pr ob[x < (\mu + \alpha\sigma)] = \int_{-\infty}^{\mu+\alpha\sigma} f(x)dx = \Pr ob(Z < \alpha) = 1 - c$$

L'ipotesi di distribuzione normale



Il livello di confidenza

Fattori scalari corrispondenti ai diversi livelli di confidenza

Livello di confidenza	$\alpha = \frac{R^* - \mu}{\sigma}$
99,99%	3,719
99,98%	3,500
99,97%	3,432
99,87%	3,000
99,90%	3,090
99,50%	2,576
99,38%	2,500
99,00%	2,326
98,00%	2,054
97,72%	2,000
97,50%	1,960
97,00%	1,881
96,00%	1,751
95,00%	1,645
93,32%	1,500
84,13%	1,000

Il livello di confidenza

- Il valore a rischio è dato dalla differenza fra il profitto atteso e la perdita corrispondente al livello di confidenza desiderato

$$VaR = E(P) - L_c$$

- In realtà per i rischi di mercato si ipotizza una distribuzione normale con media nulla
  - Orizzonte temporale breve: miglior previsione del P di domani è il P di oggi ⇨ rendimento atteso nullo
  - Approccio Bayesiano: principi finanza piuttosto che valore medio storico

$$VaR = L_c$$

Il livello di confidenza

- Hp. Deviazione standard dei rendimenti del fattore di mercato = 1%
- Se la distribuzione è normale, allora:
  - 68% probabilità rendimento fra -1% e + 1%
  - 16% probabilità di una perdita maggiore di 1% ⇨ 84% livello di confidenza
  - 95,4% prob. rend. compreso fra -2% e + 2%
  - 2,28% probabilità di una perdita maggiore di 2% ⇨ 97,72% livello di confidenza

Il livello di confidenza

- Banche più avverse al rischio scelgono livelli di confidenza maggiori
- Molte banche internazionali derivano il livello di confidenza dal proprio rating
  - (i) Economic capital = VaR
  - (ii) Livello di confidenza = 99%
  - ⇨ PD banca = 1%
  - Se PD di una società BBB- = 0,70% (Moodys) ⇨ livello confidenza banca BBB- = 99,3%

Il livello di confidenza

La scelta del livello di confidenza

Classe di rating Moody's	*Probabilità di insolvenza a 1 anno*	*Livello di confidenza*
Aaa	0,001%	99,999%
Aa1	0,01%	99,99%
Aa2	0,02%	99,98%
Aa3	0,03%	99,97%
A1	0,05%	99,95%
A2	0,06%	99,94%
A3	0,09%	99,91%
Baa1	0,13%	99,87%
Baa2	0,16%	99,84%
Baa3	0,70%	99,30%
Ba1	1,25%	98,75%

Approcci alternativi

Asset normal vs. delta normal

- Asset normal
  - Ipotesi di distribuzione normale dei valori di mercato delle posizioni (prezzi)
- Delta normal
  - Ipotesi di distribuzione normale dei rendimenti dei fattori di mercato

- I due approcci coincidono se la sensibilità delle posizioni è lineare (es. posizioni in cambi)

Il VaR di un portafoglio

- Il VaR di un portafoglio può essere stimato ricorrendo alla teoria di portafoglio come una funzione di:
  - Valori di mercato e sensibilità delle singole posizioni
  - Volatilità dei singoli fattori di mercato
  - Correlazioni fra i rendimenti degli N fattori di mercato

$$VaR_{P,N} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(VM_i \cdot \delta_i \cdot \alpha \cdot \sigma_i)\cdot(VM_j \cdot \delta_j \cdot \alpha \cdot \sigma_j)\cdot \rho_{ij}}$$

Il VaR di un portafoglio

- Esempio: 2 posizioni valutarie
  - Posizione lunga in USD per EUR 50 mln
  - Posizione corta in Yen per EUR 10 mln
  - Volatilità giornaliera EUR/USD = 2%
  - Volatilità giornaliera EUR/YEN = 3%
  - Correlazione EUR/USD – EUR/YEN = 0,6

$$VAR_{USD,YEN} = \sqrt{(50m \cdot 2 \cdot 2\%)^2 + (10m \cdot 2 \cdot 3\%)^2 + 2 \cdot 50m \cdot 2 \cdot 2\% \cdot (-10m) \cdot 2 \cdot 3\% \cdot 0{,}6} = 1.708.801$$

Il VaR di un portafoglio

- Nel caso di un portafoglio composto da numerose posizioni sensibili a diversi fattori di mercato si ricorre all'uso dell'algebra matriciale

$$\overline{V} = \begin{vmatrix} VaR_1 \\ VaR_2 \\ \dots \\ VaR_N \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,N} \\ \rho_{2,1} & 1 & \dots & \rho_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{N,1} & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$VaR_P = \sqrt{\overline{V} \cdot C \cdot \overline{V}^T}$$

Il VaR di un portafoglio

- Problemi:
  - Instabilità correlazioni
  - Raccordo con meccanismo di attribuzione delle responsabilità
- Possibile soluzione semplificatrice
  - Ipotesi indipendenza rendimenti fattori di mercato di diversa "categoria"

$$\boxed{Var_{Tot} = \sqrt{Var_{FX}^2 + Var_{IR}^2 + Var_{Equity}^2}}$$

Il VaR di un portafoglio

- Due aspetti importanti
  - 1) Il VaR di un portafoglio di 2 posizioni può risultare inferiore a quello della posizione più rischiosa ⇨ *natural hedge*
  - 2) Le correlazioni tendono ad aumentare in corrispondenza di shock di mercato ⇨ day-to-day RM è cosa diversa da stress-testing/crises mgmt

Il mapping

- La stima del VaR richiede che le singole posizioni del portafoglio vengano “ricondotte” ai fattori di mercato rilevanti

Esempio:

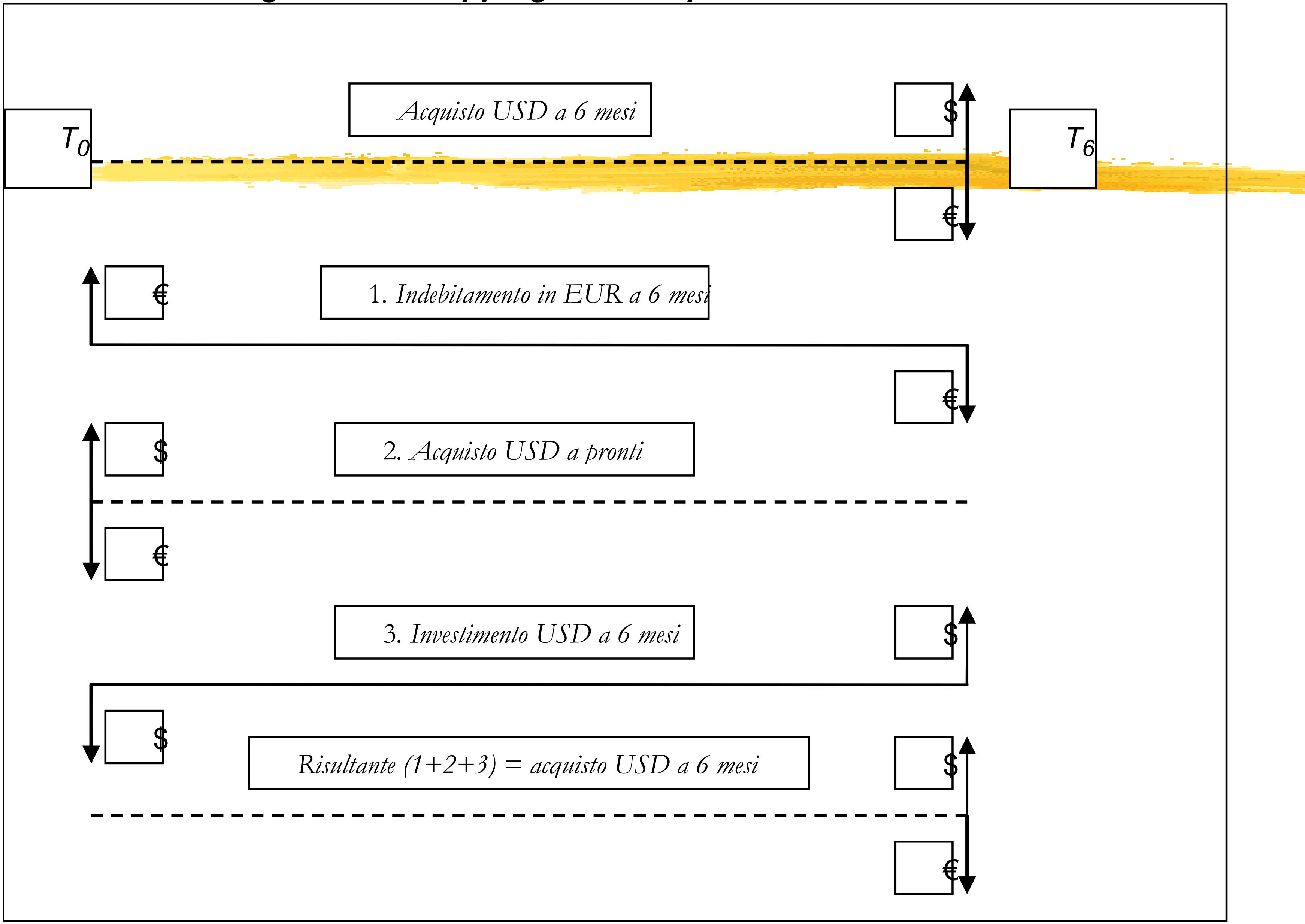
- Una posizione lunga in Treasury bond USA equivale a:
  - una posizione lunga sul cambio EUR/USD
  - una posizione corta sulla curva tassi USD

Il mapping

- Una posizione lunga in USD forward a 6 mesi equivale a:
  - Una posizione lunga sul cambio a pronti EUR/USD (acquisto USD a pronti contro EUR)
  - Un indebitamento in EUR con scadenza 6 mesi
  - Un investimento in USD con scadenza 6 mesi

$$F_t = S \cdot \frac{1 + i_d \cdot t}{1 + i_f \cdot t}$$

Figura 2 – Il mapping di un acquisto di dollari a 6 mesi



Mapping

Esempio: acquisto a 6 mesi di USD 1 mln

Tassi di cambio e di interesse

Tasso di cambio a pronti EUR/USD	1,2
Tasso di interesse EUR a 6 mesi	3,50%
Tasso di interesse USD a 6 mesi	2,00%
Tasso di cambio EUR/USD a 6 mesi	1,209

1. Indebitamento in EUR $D_{EUR} = 990.099 \cdot 1{,}2 = 1.118.119$

2. Acquisto USD a pronti $USD_{spot} = 990.099 \cdot 1{,}2$

3. Investimento in USD $I_{USD} = \dfrac{1.000.000}{(1 + 0{,}02 \cdot 0{,}5)} = \$990.099$

Mapping

Volatilità e correlazioni - Fattori di mercato di una posizione a termine

		Correlazione con		
Fattore di mercato	Volatilità	EUR/USD	i_{EUR6m}	i_{USD6m}
Tasso di cambio spot EUR/USD	3%	1	-0,2	+0,4
Tasso di interesse EUR a 6 mesi (i_{EUR6m})	1,5%	-0,2	1	+0,6
Tasso di interesse USD a 6 mesi (i_{USD6m})	1,2%	+0,4	0,6	1

$$VaR_{iEUR6m} = 1.118.119 \cdot 1{,}5\% \cdot 2{,}326 \cdot 0{,}483 = 18.849$$

$$VaR_{iUSD6m} = 990.099 \cdot 1{,}2\% \cdot 2{,}326 \cdot 0{,}490 = 13.549 = \in 16.259$$

$$VaR_{USDspot} = 990.099 \cdot 3\% \cdot 2{,}326 = 69.099 = \in 82.919$$

Mapping

$$VaR_{USD6m} = \sqrt{\begin{array}{l} VaR^2_{iEUR6m} + VaR^2_{iUSD6m} + VaR^2_{USDspot} + 2 \cdot VaR_{iEUR6m} VaR_{iUSD6m} \rho_{iEUR,iUSD} + \\ + 2 \cdot VaR_{iEUR6m} VaR_{USDspot} \rho_{iEUR6m,USDspot} + 2 \cdot VaR_{iUSD6m} VaR_{USDspot} \rho_{iUSD6m,USDspot} \end{array}}$$

$$= \sqrt{\begin{array}{l} 18.849^2 + 16.259^2 + 82.919^2 + 2 \cdot 18.849 \cdot (-16.259) \cdot 0,6 + \\ + 2 \cdot 18.849 \cdot 82.919 \cdot (-0,2) + 2 \cdot (-16.259) \cdot 82.919 \cdot 0,4 \end{array}} = 83.646$$

VaR complessivo della posizione in USD
a 6 mesi

Mapping

- Posizioni in titoli azionari vengono ricondotte al relativo indice di mercato mediante il beta
- Il beta rappresenta in questo caso un indicatore di sensibilità del rendimento del titolo alle variazioni dell'indice di mercato

- VaR titolo
- VaR portafoglio

$$VaR_i = VM_i \cdot \beta_i \cdot \sigma_j \cdot \alpha$$

$$VaR_j = \left(\sum_{i=1}^{N} VM_i \cdot \beta_i \right) \cdot \sigma_j \cdot \alpha$$

Mapping

Esempio metodo *mapping* all'indice di mercato

Tabella 8 – Esempio di mapping delle posizioni azionarie

	Titolo A	*Titolo B*	*Titolo C*	*Portafoglio*
Valore di Mercato (€ m)	10	15	20	45
Beta	1,4	1,2	0,8	1,067
Posizione virtuale nell'indice (€ m)	14	18	16	48
Volatilità	15,0%	12,0%	10,0%	
Correlazione con A	1	0,5	0,8	
Correlazione con B	0,5	1	0	
Correlazione con C	0,8	0	1	

$$VaR_{P,99\%} = \left(\sum_{i=1}^{N} VM_i \cdot \beta_i \right) \cdot \sigma_j \cdot \alpha = 48 \cdot 0{,}07 \cdot 2{,}326 = 7{,}817$$

Mapping

Esempio metodo volatilità singoli titoli e correlazioni

Tabella 8 – Esempio di mapping delle posizioni azionarie

	Titolo A	*Titolo B*	*Titolo C*	*Portafoglio*
Valore di Mercato (€ m)	10	15	20	45
Beta	1,4	1,2	0,8	1,067
Posizione virtuale nell'indice (€ m)	14	18	16	48
Volatilità	15,0%	12,0%	10,0%	
Correlazione con A	1	0,5	0,8	
Correlazione con B	0,5	1	0	
Correlazione con C	0,8	0	1	

$$VaR_{P,99\%} = \sqrt{VaR_A^2 + VaR_B^2 + VaR_C^2 + 2VaR_A VaR_B \rho_{A,B} + 2VaR_A VaR_C \rho_{A,C} + 2VaR_B VaR_C \rho_{B,C}} = 9{,}5$$

Tabella 9 – Il VaR di un portafoglio azionario

				Portafoglio	
	Titolo A	*Titolo B*	*Titolo C*	*Mapping*	*Volatilità & Correlazioni*
VaR (99%)	*3,490*	*4,187*	*4,653*	*7,817*	*9,589*

Mapping

Tabella 9 – Il VaR di un portafoglio azionario

				Portafoglio	
	Titolo A	*Titolo B*	*Titolo C*	*Mapping*	*Volatilità & Correlazioni*
VaR (99%)	*3,490*	*4,187*	*4,653*	*7,817*	*9,589*

Metodo mapping:

•ipotesi di assenza del rischio specifico

•Il rischio sistematico è colto adeguatamente da un modello unifattoriale quale CAPM

•adeguato per portafogli ben diversificati (numero elevato di titoli senza concentrazione)

L’approccio varianze-covarianze

- Ipotesi e limiti dell’approccio varianze-covarianze
  - Ipotesi di distribuzione normale dei rendimenti dei fattori di mercato
  - Stabilità della matrice varianze-covarianze
  - Ipotesi di indipendenza seriale dei rendimenti dei fattori di mercato
  - Ipotesi di sensibilità lineare delle posizioni alle variazioni dei fattori di mercato (payoff lineari)

L’approccio varianze-covarianze

Ipotesi distribuzione normale

- In realtà le distribuzioni dei rendimenti dei fattori di mercato:
  - Presentano code più spesse (*fat tails*) ⇨ curtosi maggiore di quella della normale
  - Sono sovente asimmetriche verso sinistra (“*negative skewness*”)

⬇

  - Se la distribuzione reale è leptocurtica il livello di confidenza viene sovrastimato

L'approccio varianze-covarianze

Possibili soluzioni

1. Distribuzione t di Student
   - Interamente definita da media, dev.std. e gradi di libertà
   - Parametro che controlla il grado di curtosi
   - Minore v (gradi di libertà) ⇨ code più spesse

Tabella 10 - Confronto fra distribuzione normale e t di Student - Multipli della deviazione standard corrispondenti a diversi livelli di confidenza

Livello di confidenza	*Multiplo deviazione standard*							
	Distribuzione normale standardizzata	*t di Student con v gradi di libertà*						
		v = 10	*v = 9*	*v = 8*	*v = 7*	*v = 6*	*v = 5*	*v = 4*
99,99%	3,72	6,21	6,59	7,12	7,89	9,08	11,18	15,53
99,50%	2,58	3,58	3,69	3,83	4,03	4,32	4,77	5,60
99,00%	2,33	3,17	3,25	3,36	3,50	3,71	4,03	4,60
98,00%	2,05	2,76	2,82	2,90	3,00	3,14	3,36	3,75
97,50%	1,96	2,63	2,69	2,75	2,84	2,97	3,16	3,50
95,00%	1,64	2,23	2,26	2,31	2,36	2,45	2,57	2,78
90,00%	1,28	1,81	1,83	1,86	1,89	1,94	2,02	2,13

L'approccio varianze-covarianze

Possibili soluzioni

2. Mixture of normals (*RiskMetrics™*)

- I rendimenti sono estratti da due distribuzioni normali con media uguale ma ma diversa varianza
- Funzione di densità:

$$PDF = p_1 \cdot N_1(\mu_1, \sigma_1) + p_2 \cdot N_2(\mu_2, \sigma_2)$$

- La prima distribuzione ha probabilità > e varianza <
- Giustificazione empirica: volatilità funzione di due fattori : (i) strutturali e (ii) ciclici o congiunturali
- I primi incidono in modo permanente sul livello di volatilità

L’approccio varianze-covarianze

Ipotesi di sensibilità lineare

- In realtà molti strumenti presentano una sensibilità non lineare : bonds, opzioni, swap
- Possibile soluzione: approccio delta-gamma

$$VAR_i = VM_i \cdot \left(\delta_i \cdot \alpha \cdot \sigma_i - \frac{\gamma}{2} \cdot \alpha \cdot \sigma_i^{\ 2} \right)$$

- In questo modo si tiene conto anche del grado di “curvatura” della relazione fra valore di mercato e fattore di mercato rilevante

L’approccio varianze-covarianze

Ipotesi di sensibilità lineare

- Problema:la distribuzione delle variazioni del valore del portafoglio deriva dalla combinazione di un’approssimazione lineare (delta) e di una quadratica (gamma) ⇨ la forma funzionale della distribuzione delle variazioni dei valori di mercato non è determinata
- Alcuni portafogli di opzioni presentano un *payoff* non monotono ⇨ anche l’utilizzo dell’espansione al secondo termine conduce a errori significativi
- Possibile soluzione alternativa a delta-gamma: full valuation ⇨ modelli di simulazione