Immunizzazione finanziaria

Francesco Manzini

1 Una Uscita

Si consideri un portafoglio di $\{c_k\}_{k=1,\dots,n}$, $n \geq 3$, crediti esigibili agli instanti $\{\frac{k}{m}\}_{k=1,\dots,n}$ (tempo espresso in anni) volti a coprire una spesa pari ad U dovuta all'istante T, tale che

$$T = \frac{h}{m},\ h \text{ fissato oppurtuno, tale che } 2 \leq h \leq n-1.$$

Sia inoltre λ il rendimento nominale a scadenza comune a tutti i titoli (capitalizzazione degli interessi ogni m-esimo di anno). Indicando con $VP(u,t)$ il valore del portafoglio crediti all'istante t e rendimento (nominale) u, l' immunizzazione di un portafoglio di titoli in T si definisce richiedendo che $VP(u,T)$ abbia un minimo in $u = \lambda$, cioè:

$$VP(\lambda + s, T) \geq VP(\lambda, T) = U\ \forall s \text{ in un intorno opportuno dell'origine.}$$

Una condizione necessaria affinchè ciò accada è che

$$\left.\frac{\partial VP(\lambda + s, T)}{\partial s}\right|_{s=0} = 0 \tag{1}$$

Una condizione sufficiente è che

$$\left.\frac{\partial^2 VP(\lambda + s, T)}{\partial s^2}\right|_{s=0} > 0 \tag{2}$$

ove

$$VP(\lambda + s, T) = \sum_{k=1}^{n} c_k \left(1 + \frac{\lambda + s}{m}\right)^{mT-k}.$$

La condizione per la quale è assicurata la copertura dell'uscita tramite il credito proveniente dal portafoglio è , nelle ipotesi fatte, la $VP(\lambda, T) = U$ che equivale a richiedere

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^{mT-k} = U.$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned}
\frac{\partial VP(\lambda + s, T)}{\partial s} &= \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{mT-k}{m} \left(1 + \frac{\lambda+s}{m}\right)^{mT-k-1} \\
&= \frac{1}{1 + \frac{\lambda+s}{m}} \sum_{k=1}^{n} c_k \left(T - \frac{k}{m}\right) \left(1 + \frac{\lambda+s}{m}\right)^{mT-k} \\
\left.\frac{\partial VP(\lambda + s, T)}{\partial s}\right|_{s=0} &= \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{m}} \sum_{k=1}^{n} c_k \left(\frac{mT-k}{m}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^{mT-k}
\end{aligned}$$

La condizione

$$\left.\frac{\partial VP(\lambda + s, T)}{\partial s}\right|_{s=0} = 0$$

è assicurata da

$$\sum_{k=1}^{n} \left(c_k T \left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^{mT-k} - c_k \frac{k}{m} \left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^{mT-k} \right) = 0$$

se e solo se

$$\sum_{k=1}^{n} c_k T \left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^{mT-k} = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{k}{m} \left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^{mT-k}$$

essendo T indipendente da k posso estrarlo dalla sommatoria ed ottenere

$$T \sum_{k=1}^{n} c_k \left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^{mT-k} = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{k}{m} \left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^{mT-k}$$

ovverosia

$$\begin{aligned}
T &= \frac{\sum_{k=1}^{n} c_k \frac{k}{m} \left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^{mT-k}}{\sum_{k=1}^{n} c_k \left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^{mT-k}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} c_k \frac{k}{m} \left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^{-k}}{\sum_{k=1}^{n} c_k \left(1 + \frac{\lambda}{m}\right)^{-k}} \\
&= dur_P(0, \lambda)
\end{aligned}$$

Indicando con $dur_P(0, \lambda)$ la "duration" del portafoglio titoli al tempo $t = 0$ ed al tasso λ.
Calcoliamo ora $\left.\frac{\partial^2 VP(\lambda+s,T)}{\partial s^2}\right|_{s=0}$

$$\frac{\partial^2 VP(\lambda+s,T)}{\partial s^2} = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{(mT-k)(mT-k-1)}{m^2}\left(1+\frac{\lambda+s}{m}\right)^{mT-k-2}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 VP(\lambda+s,T)}{\partial s^2}\right|_{s=0} &= \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{(mT-k)(mT-k-1)}{m^2}\left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^{mT-k-2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{((mT-k)^2-(mT-k))}{m^2}\left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^{mT-k-2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{(mT-k)^2}{m^2}\left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^{mT-k-2} - \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{(mT-k)}{m^2}\left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^{mT-k-2}\end{aligned}$$

osserviamo che dalla (1) segue

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \frac{(mT-k)}{m^2}\left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^{mT-k-2} = 0$$

dunque

$$\left.\frac{\partial^2 VP(\lambda+s,T)}{\partial s^2}\right|_{s=0} = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{(mT-k)^2}{m^2}\left(1+\frac{\lambda}{m}\right)^{mT-k-2} > 0$$

che é appunto la (2), quindi la $VP(\lambda + s, T)$ ha in $s = 0$ un minimo locale e quindi il portafoglio titoli è immunizzato.